

# [138] 鉄筋コンクリート平板の引張剛性と平面応力場における構成方程式

正会員 ○田辺忠顕(名古屋大学工学部)

正会員 吉川弘道(間組技術研究所)

## 1. クラックひずみを用いた剛性評価と構成方程式

本文は、併報[1]にて導出したRC単軸部材の引張剛性モデルをもとにして、これを直交配筋をもつRC平板に拡張し、クラックひずみベクトルと等価剛性マトリックスの構築および実験結果との比較を行うものである。

ひびわれの生じているRC部材(図-1(a))における鉄筋とコンクリートのひずみベクトルを、各々 $\{\varepsilon_s\}$ 、 $\{\varepsilon_c\}$ とすると、ひびわれおよび鉄筋とコンクリート間の相対的すべりにより、これら両者は必ずしも等しくない。すなわち、全変位の勾配として定義される全ひずみを $\{\varepsilon\}$ とすれば、鉄筋のひずみ $\{\varepsilon_s\}$ はこれと等しく、コンクリートのひずみ $\{\varepsilon_c\}$ の各成分は、全ひずみと等しいか小さい値とならなければならない。この差をクラックひずみ $\{\varepsilon_{or}\}$ と仮定する。そうすると、これら3者のひずみ関係は次の様に記すことができる。

$$\{\varepsilon_c\} = \{\varepsilon\} - \{\varepsilon_{or}\} \quad (1), \quad \{\varepsilon_s\} = \{\varepsilon\} \quad (2)$$

コンクリートと鉄筋の応力ベクトルを $\{\sigma_c\}$ 、 $\{\sigma_s\}$ 、剛性マトリックスを $[D_c]$ 、 $[D_s]$ とし、各々の材料構成則を次式で表す。

$$\{\sigma_c\} = [D_c] \{\varepsilon_c\} = [D_c] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_{or}\}) \quad (3), \quad \{\sigma_s\} = [D_s] \{\varepsilon_s\} = [D_s] \{\varepsilon\} \quad (4)$$

上式を、作用外力 $\{\sigma\}$ と材料応力 $\{\sigma_c\}$ 、 $\{\sigma_s\}$ との釣合条件、 $\{\sigma\} = \{\sigma_c\} + \{\sigma_s\}$ に代入すると、次式が得られる。

$$\{\sigma\} = ([D_s] + [D_c]) \{\varepsilon\} - [D_c] \{\varepsilon_{or}\} \quad (5)$$

さらに、クラックひずみベクトルが、

$$\{\varepsilon_{or}\} = [S] \{\sigma\} \quad (6)$$

のように、作用外力 $\{\sigma\}$ の関数として表される場合、式(5)は、次式のように書き換えられる。(単位マトリックスを $[I]$ で表す)。

$$\{\sigma\} = ([I] + [D_c][S])^{-1} ([D_s] + [D_c]) \{\varepsilon\} \quad (7)$$

ここで、式(7)の右辺の剛性マトリックスを

$$[D_{sc}] = ([I] + [D_c][S])^{-1} ([D_s] + [D_c]) \\ = [\Phi] ([D_s] + [D_c])$$

とすると、これはひびわれ状態にあるRC部材の等価剛性マトリックスと解釈することができ、係数マトリックス $[\Phi]$ は、ひびわれ発生・進展に伴う剛性低下を表す無次元量に他ならない。そして、これら両式は、ひびわれの生じたコンクリート+鉄筋の合成材料としての応力~ひずみ関係あるいは構成方程式として機能するものである。

## 2. 平面応力場への拡張および定式化

図-1(c)に示すような2軸主応力 $\sigma_1$ (引張主応力 $>0$ )、 $\sigma_2$ (圧縮主応力 $\leq 0$ )を受ける鉄筋コンクリート平板を考え、引張応力の方向を $\theta_1$ とする。直交配筋を対象とし、その配筋方向をx-y座標系にとる(図-1(b))。ひびわれは、引張主応力 $\sigma_1$ によって生じたものとし、そのときのひびわれ傾角 $\theta_{cr}$ は $\theta_1$ に等しいとする。直交鉄筋方向をx-y座標系、これより反時計方向に $\theta_{cr}$ 傾いたひびわれ方向をn-t座標系として定義する。

○クラックひずみベクトル----併報[1]により、RC単軸部材のひびわれ幅 $w_c$ を次のようにも書くことができる。

$$w_c = 2b_c \cdot \tanh\left(-\frac{l_c}{b_c}\right) \cdot \frac{\sigma_1}{p E_s} = 2b_c \cdot \tanh\left(-\frac{l_c}{b_c}\right) \cdot \frac{\sigma_{se}}{p E_s} \quad (9)$$

上式は、載荷引張応力 $\sigma_1$ をひびわれ面における鉄筋応力 $\sigma_{se}$ に置換えたものである(なぜならば、ひびわれ面で両者はひとしい)。これは、ひびわれ面の鉄筋応力によってひびわれ幅が表現できることを意味し、同様に2次元場においても上式を準用する。x-y座標系でひびわれ開口量を $\delta_x$ 、 $\delta_y$ (図-2参照)とし、これらを次式で与える。

$$\delta_x = 2b_{ox} \cdot \tanh\left(-\frac{l_{ox}}{b_{ox}}\right) \cdot \frac{\sigma_{sx}}{p_x E_s}, \quad \delta_y = 2b_{oy} \cdot \tanh\left(-\frac{l_{oy}}{b_{oy}}\right) \cdot \frac{\sigma_{sy}}{p_y E_s} \quad (10)$$

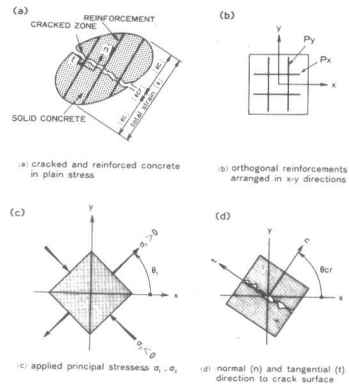


図-1 ひびわれを有する鉄筋コンクリート部材における、配筋方向、外力の作用方向、ひびわれ方向の定義

ここで、 $\sigma_x^{SB}$ 、 $\sigma_y^{SB}$  はひびわれ面における  $x$  方向鉄筋および  $y$  方向鉄筋の応力である。(ここで扱う“鉄筋応力”とは、要素内で一様に平均化したものを言う)。また、 $b_{cx}, b_{cy}$  をそれぞれ  $x$ 、 $y$  方向の付着特性値、 $l_{cx}, l_{cy}$  は  $x$ 、 $y$  方向のひびわれ間隔を示すもので、前報[1] の  $b_c, l_c$  を  $x$ 、 $y$  2方向に拡張・再定義した。 $x$ - $y$  方向の変位ベクトル  $\{\delta_x \ \delta_y\}^T$  と  $n$ - $t$  方向の変位ベクトル  $\{\delta_n \ \delta_t\}^T$  は次式の座標変換式によって関係づけられる(図-2(c))。

$$\begin{Bmatrix} \delta_n \\ \delta_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{or} & \sin \theta_{or} \\ -\sin \theta_{or} & \cos \theta_{or} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{Bmatrix} \quad (11)$$

(下添字  $x, y$  は  $x$ - $y$  座標の各方向、同様に下添字  $n, t$  は  $n$ - $t$  座標系の各方向を表す。上添字  $T$  は転置を示す。)

前報[1] で示した単軸引張下のクラックひずみの定義式およびひびわれ間隔にわたる平均化によって、クラックひずみ=ひびわれ幅÷ひびわれ間隔のようにも記述できることから、これにならって、2次元場におけるクラックひずみベクトル  $\{\epsilon_{or}\}$  を、 $n$ - $t$  座標系において次のように表すものと考えた。

$$\begin{aligned} \{\epsilon_{or}\}_{nt} &= \{\epsilon_n^{or} \ \epsilon_t^{or} \ \gamma_{nt}^{or}\}^T \\ &= \left\{ \frac{\partial \delta_n}{\partial n} \ \frac{\partial \delta_t}{\partial t} \ \frac{\partial \delta_n}{\partial t} + \frac{\partial \delta_t}{\partial n} \right\}^T = \left\{ \frac{\partial \delta_n}{2l_c} \ 0 \ \frac{\partial \delta_t}{2l_c} \right\}^T \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 $\epsilon_n^{or}$ 、 $\epsilon_t^{or}$ 、 $\gamma_{nt}^{or}$  は  $n$ - $t$  座標系におけるクラックひずみの3成分を示す。剛性マトリックス、応力ベクトルを用いる時はその基準座標系を明示する必要がある、 $x$ - $y$  座標系を基準とする場合、 $[\ ]_{xy}$ 、 $n$ - $t$  座標系(ひびわれ方向)をとる場合、 $[\ ]_{nt}$ のごとく、括弧外の下添字によって示した。 $x$ 、 $y$  方向におけるひびわれ間隔の半長は、図-2(d)から、 $l_{cx} = l_c / \cos \theta_{or}$ 、 $l_{cy} = l_c / \sin \theta_{or}$ と表すことができる。以上より下式を得る。

$$\epsilon_n^{or} = \frac{\tanh(\mu_x)}{\mu_x} \cdot \frac{\sigma_x^{SB}}{p_x E_s} + \frac{\tanh(\mu_y)}{\mu_y} \cdot \frac{\sigma_y^{SB}}{p_y E_s}, \quad \gamma_{nt}^{or} = -\tan \theta_{or} \cdot \frac{\tanh(\mu_x)}{\mu_x} \cdot \frac{\sigma_x^{SB}}{p_x E_s} + \cot \theta_{or} \cdot \frac{\tanh(\mu_y)}{\mu_y} \cdot \frac{\sigma_y^{SB}}{p_y E_s} \quad (13)$$

上式では、 $x$ 、 $y$  方向のひびわれ間隔を正規化して、 $l_{cx} / b_{cx} \rightarrow \mu_x$ 、および  $l_{cy} / b_{cy} \rightarrow \mu_y$  と置換えた。さらに、前報で定義した引張硬化係数  $\lambda$  を、2次元場における  $x$ 、 $y$  方向成分について、次式のように再定義した。

$$\lambda_x = \frac{\tanh(\mu_x)}{\mu_x}, \quad \lambda_y = \frac{\tanh(\mu_y)}{\mu_y} \quad (14)$$

また、ひびわれ界面での両方向鉄筋応力と作用応力との関係は、ひびわれ界面でのせん断伝達がない( $\tau_{nt} = 0$ )という仮定のもとに次式が成立する(これはひびわれ界面での釣合い条件から得られる)。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^{SB} \\ \sigma_y^{SB} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

式(14)、(15)を式(13)に代入すると、クラックひずみベクトルを得る。

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_n^{or} \\ \epsilon_t^{or} \\ \gamma_{nt}^{or} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\tan \theta_{or} & \cot \theta_{or} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x / p_x E_s & 0 \\ 0 & \lambda_y / p_y E_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

上式は、前章で形式的に定義した式(6)に対応するもので、係数マトリックス  $[S]$  は次式となる。

$$[S]_{nt} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\tan \theta_{or} & \cot \theta_{or} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x / p_x E_s & 0 \\ \lambda_y / p_y E_s & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_n & 0 \\ S_{nt} & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\text{ただし、} S_n = \frac{\lambda_x}{p_x E_s} + \frac{\lambda_y}{p_y E_s}$$

$$S_{nt} = -\tan \theta_{or} \cdot \frac{\lambda_x}{p_x E_s} + \cot \theta_{or} \cdot \frac{\lambda_y}{p_y E_s} \quad (18)$$

○剛性マトリックス --- 式(8)に式(17)を代入して、 $n$ - $t$  座標系における

剛性マトリックス  $[D_{RC}]_{nt}$ 、係数マトリックス  $[\Phi]_{nt}$  を求解し、次式のように整理することができる。

$$[D_{RC}]_{nt} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S_n E'_c + 1} & 0 & 0 \\ -\frac{S_{nt} \gamma'_c E'_c}{S_n E'_c + 1} & 1 & 0 \\ -\frac{S_{nt} \gamma'_c}{S_n E'_c + 1} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ([D_s]_{nt} + [D_c]_{nt}), \quad E'_c = \frac{E_c}{1 - \nu_c^2} \quad (19), \quad [\Phi]_{nt} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & 0 \\ \Phi_2 & 1 & 0 \\ \Phi_3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$[\Phi]$  はひびわれに伴う剛性低下を表す係数マトリックスであるが、状態 I の場合、 $\lambda_x = \lambda_y = 0$ 、 $S_n = S_{nt} = 0$  から  $\Phi_1 = 1$ 、 $\Phi_2 = \Phi_3 = 0$  (すなわち  $[\Phi] = [I]$ ) となり、ひびわれのない状態に帰着する。

ここで、前報[1]で導入した3個の無次元係数のうち、非線形パラメーター  $\beta$ 、正規化ひびわれ間隔  $\mu$  を2次元状

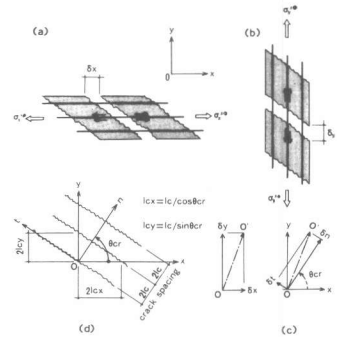


図-2 二次元場におけるひびわれ界面の相対的不連続変位量およびひびわれ間隔の定義 (a)  $x$  方向の間隔  $\delta_x$ 、(b)  $y$  方向の間隔  $\delta_y$ 、(c)  $\{\delta_x \ \delta_y\}^T$  から  $\{\delta_n \ \delta_t\}^T$  への変換、(d) ひびわれ間隔の定義

態で次のように再定義した。単軸部材での鉄筋比  $p$  の代わりに、ひびわれ直交方向 ( $n$  方向) の等価鉄筋比  $p_{\parallel}$  を  $p_{\parallel} = p_x \cos^2 \theta_{cr} + p_y \sin^2 \theta_{cr}$  のように仮定し、単軸引張応力  $\sigma$  の代りに引張主応力  $\sigma_1$  を用いている。

$$\beta = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_1 - (1 + np_{\parallel}) f_t}{p_{\parallel} f_y - (1 + np_{\parallel}) f_t} \quad (21), \quad \mu = \beta \cosh^{-1} \left\{ \frac{\sigma_1 - (1 + np_{\parallel}) f_t}{p_{\parallel} f_y - (1 + np_{\parallel}) f_t} \right\} \quad (22)$$

一方、 $x$  および  $y$  方向 (直交鉄筋の配筋方向) の  $\mu_x$  および  $\mu_y$  は、上式の  $\mu$  を用い、式(23)のように仮定する。

$$\mu_x = \frac{\mu}{\cos^2 \theta_{cr}}, \quad \mu_y = \frac{\mu}{\sin^2 \theta_{cr}} \quad (\kappa: \text{定数}) \quad (23)$$

3. 基本的な応力場での数値解析例と既往実験結果との比較  
これまでの算定結果を基に、基本的な応力状態での剛性マトリックスについて考察し、数値シミュレーションおよび実験結果との比較を行う。(ただし、割線係数法による応力制御)。  
○斜め引張---図-3 は、斜め引張時の載荷引張力  $\sigma_1$  と同方向の変位  $\varepsilon_n$  との関係を示したものである。(a), (b) は、 $\theta_1 = 0^\circ$  と  $\theta_1 = 45^\circ$  の場合について、鉄筋比  $p$  をパラメータとして図示したもので、ともにひびわれ直後、状態 I から離脱し、その後、状態 II に漸近していることがわかる。(  $x$ ,  $y$  方向等量配筋とし、これを鉄筋比  $p$  とした)。また、主引張力の方向 (ひびわれ方向  $\theta_{cr}$ ) によって、曲線形・剛性が変化することが、(c) によって明瞭に観察することができる。

○純せん断--- $x$ - $y$  座標系に純せん断応力  $\tau_{xy}$  が作用したときの剛性マトリックスとこのときのせん断剛性を求める。純せん断状態では、 $45^\circ$  方向に斜めひびわれが形成される。この場合の剛性マトリックス  $[D_{RC}]$  を、 $x$ - $y$  座標系について次式のように記述される。

$$[D_{RC}]_{xy} = \frac{E_c}{4} \times \begin{bmatrix} (1+\phi_1+\phi_2)(1+\nu_c+n'p)+2(1-\nu_c+n'p) & (1+\phi_1+\phi_2)(1+\nu_c+n'p)-2(1-\nu_c+n'p) \\ (1+\phi_1+\phi_2)(1+\nu_c+n'p)-2(1-\nu_c+n'p) & -(1-\phi_1+\phi_2)(1-\nu_c) \end{bmatrix}^* \quad (24)$$

ここで、RC 部材としての等価せん断剛性  $G_{RC} \equiv \tau_{xy} / \gamma_{xy}$ , および構造的ダイラタンシー比  $\eta \equiv \varepsilon_x / \gamma_{xy} = \varepsilon_y / \gamma_{xy}$  の 2 個の割性係数を定義し、これは次式で与えられる。

$$G_{RC} = \frac{2\phi_1 G_c}{1+\phi_1+\phi_2} \quad (25) \quad \eta = \frac{(1-\phi_1-\phi_2)(1-\nu_c)}{2(1+\phi_1+\phi_2)(1+\nu_c+n'p)} \quad (26)$$

図-4 は、せん断ひずみ  $\gamma_{xy}$  に対する各係数の非線形応答を示したもので、(a) せん断ひずみと正規化した等価せん断剛性の関係、(b) せん断ひずみとせん断応力の関係、(c) せん断ひずみと構造的ダイラタンシー比の関係を図化したものである。また、コンクリート本体の応力~ひずみ関係を非線形 (2 次放物線) とした場合を点線、状態 I, II を一点鎖線で併記した。

○実験結果との比較---図-5 は、高温を内部から附与し、その後ねじり加力を載荷した円筒供試体 (松井・山口・中山ら[2]) のせん断変形と比較したものである。この両負荷を

厳密に解析するには、軸対称および 3 次元としての構造モデルが必要となるが、本文では、高温負荷時の縦横ひびわれによる剛性低下を非線形パラメータ  $\beta$  と圧縮コンクリートの低減係数  $\lambda_{com}$  によって近似的に表現し得るものとし、基本的に純ねじりを面内方向の純せん断として解析した。すなわち、(a) の CTI (室温) では非線形パラメータ

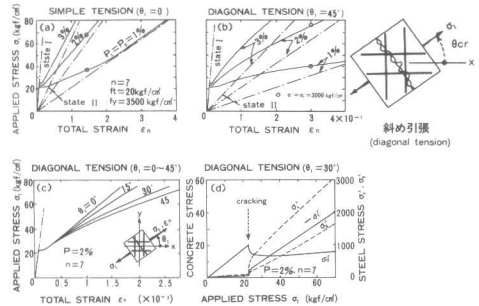


図-3 斜め引張応力を受ける RC 平板の数値解析結果、荷重~変形関係 (a)  $\theta_1 = 0^\circ$ , (b)  $\theta_1 = 45^\circ$ , (c)  $\theta_1 = 0 \sim 45^\circ$ , (d) 材料応力の変化  $\theta_1 = 30^\circ$

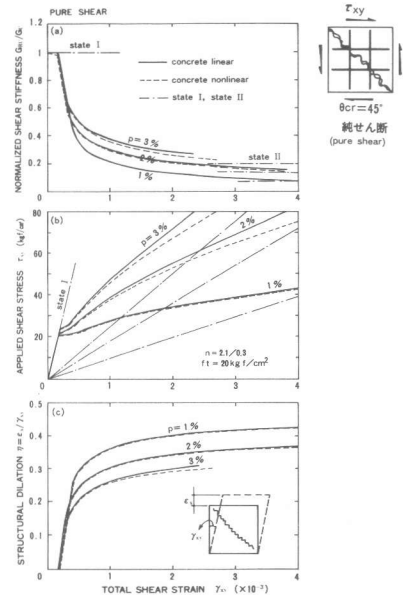


図-4 純せん断を受ける RC 平板の数値解析結果 ( $p=1\%$ ,  $2\%$ ,  $3\%$ ) (a) せん断ひずみと正規化した等価せん断剛性の関係、(b) せん断ひずみとせん断応力の関係、(c) せん断ひずみと構造的ダイラタンシーの関係

$\beta$ をそのまま用い(式(21))、一方、高温負荷を受けたもの(CT2~4)では非線形パラメーターとしてその下界値( $\beta=0.5$ )を採り、さらに(d)のCT4(負荷温度=175°C)では $\lambda_{con}=0.4$ まで低減させた。このような近似手法により、解析値と実験値は概ね合致した。

図-6は、Vecchio, Collins (1982)によるRC平板の純せん断実験[3]と比較を行ったもので、せん断変形、コンクリートの圧縮応力、引張コンクリートのひずみ軟化など、主要な非線形挙動について、解析値と実験値は概ね合致している。特に、同図はx, y方向の鉄筋量が異なる場合( $P_x > P_y$ )であり、コンクリート応力ベクトルの主軸 $\theta$ 。および全ひずみベクトルの主軸 $\theta_s$ の変化について検討したものである。実験結果を見ると、ひびわれ発生前では $\theta_c, \theta_s$ は主応力方向( $\theta_1=45^\circ$ )に合致しているが、ひびわれ発生直後から $\theta_s$ が減少し、さらに片方向の鉄筋降伏により、 $\theta_c$ と $\theta_s$ 両者が減少していることがわかり、計算結果とほぼ合致している。

#### 4. 結論

本文は、RC単軸部材を対象とした引張剛性モデル[1]を2次元平面応力場に拡張したものである。これにより、ひびわれの進展するコンクリート+鉄筋網を一括して取扱う解析的手法が可能となり、実験結果との対応も良好であった。本文での解析は、パソコンを用いた割線係数法による計算であったが、これを増分形式(接線係数法)による有限要素法に応用することも可能である。

(詳細な定式化については、文献[4]参照)

【参考文献】 [1] 吉川・田辺; RC部材の引張剛性に関する解析的研究、第8回JCI年次講演会、昭61.6, [2] 松井・山口・中山他; 高温と外荷重を受けるコンクリート構造物A I J梗概集B、1985年10月, [3] Vecchio, Collins; The Response of Reinforced Concrete to In-plane shear and Normal Stresses, 1982年3月, [4] 田辺、吉川; ひびわれを有するRC板の平面応力場における構成方程式、JCI論文、昭61.6(掲載予定)

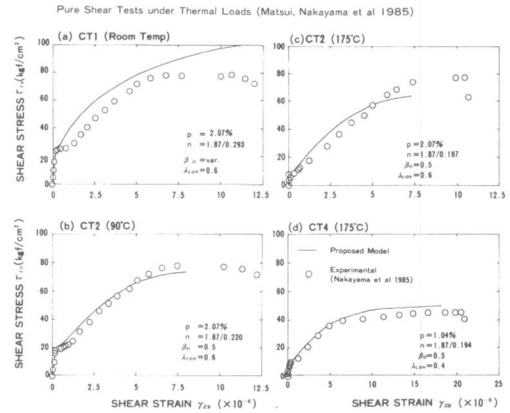


図-5 熱応力と純ねじりを受けるRC円筒に関する解析値と実験結果との比較

#### Pure Shear Tests with Nonisotropic Reinforcements

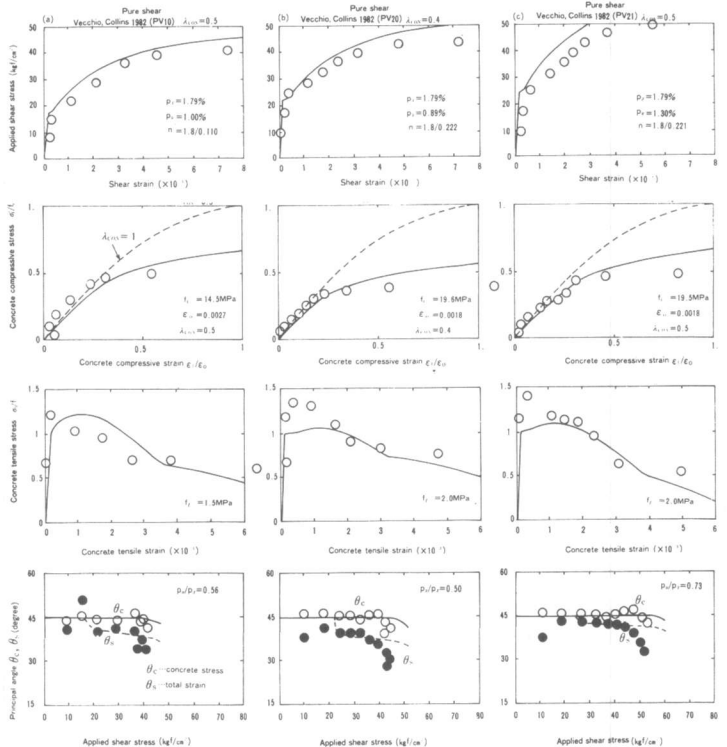


図-6 純せん断を受けるRC平板に関する解析値と実験値との比較 (縦横不等量配筋の場合、Vecchio, Collins [1982], PV10, 20, 21)