

[2017] コンクリートの引張軟化構成則の推定問題に関する基礎的検討

正会員 ○野村希晶(東北大学工学部)  
和泉正哲(東北大学工学部)

1. はじめに

コンクリートの非線形挙動が支配的な構造システムでは、微細ひび割れの発生・累積・成長の過程を考慮した破壊力学的手法の応用が必要である[1]。微細ひび割れの累積する領域(fracture process zone:以下単に破壊領域と呼ぶ)の力学的な特徴はひずみの増大と共に応力が減少するひずみ軟化である。RILEMではコンクリートの破壊力学パラメータとして単位面積当りのひび割れ形成に必要な破壊エネルギー $G_f$ を求める試験法を提案し、これを引張型ひずみ軟化モデルと結び付け構造解析に適用する方法を示している[2,3]。しかし、 $G_f$ 試験からひずみ軟化構成則が得られる訳ではなくその決定法には問題が残っている。P.E. Roelfstra等は、最小2乗法でひずみ軟化モデルを決定する手法を提案しており[4]、これは有力な方法と考えられるが、細部に検討すべき点がある。本論文では、ひずみ軟化構成則による構造物の挙動の特徴を調べると共に、最小2乗法の適用に関する問題の整理とその拡張によるCT試験の寸法効果の解析を行った結果を述べる。

2. ひずみ軟化則を用いる解析法

ひずみ軟化を生じる構造物の解析法は、ひずみ軟化の主因である破壊領域を幅0の仮想クラックに置き換え、破壊領域の挙動を軟化型の結合力-開口変位関係として与えるFictitious Crack Model[5](以下FCM)と、破壊領域を有限要素で表現するCrack Band Model[6](以下CBM)に大別できる(表1)。FCMは数値解析へ適用する段階で、長さ0の棒要素を用いる変位法と、開口変位と結合力間の撓性方程式に基づく応力法の2つに分かれる。本論では、推定解析が反復修正法を用いることから、自由度の小さい撓性方程式に基づく方法を採用した。

Mode-I型クラック線上に離散点を配した場合、各点の結合力 $\{P_i\}$ と開口変位 $\{w_i\}$ および集中荷重 $Q$ と荷重点変位 $d$ の撓性方程式は次式で表される。

$$\{w_i\} = [F_{ij}] \{P_j\} + \{C_i\} Q + \{D_i\} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

$$d = [B_i^p] \{P_j\} + B^c Q + B^d \quad (2)$$

ここに、 $[F_{ij}]$ :  $\{P_i\}$ による撓性マトリクス、 $Q$ : 集中外力、  
 $\{C_i\}$ : 集中外力に対する撓性、 $\{D_i\}$ : 自重による撓性、  
 $B_i^p, B^c, B^d$ : それぞれ  $\{P_j\}, Q, 自重$ による撓性。

上記の各撓性は対象構造を線形FEMで解いて得られる。このとき境界条件はクラックが進展し切ったときの状態を表現しなければならず、構造システムとしては不安定に近くなるので、少なくとも

表1 ひずみ軟化構成則を用いる解法の特徴

	軟化構成則	破壊領域表現	対象破壊モード	自由度	その他
FCM 変位法	応力-開口変位 ( $\sigma-w$ 則)	棒要素	Mode-I 混合モード困難	FEM節点数 に依存	
FCM 応力法	応力-開口変位 ( $\sigma-w$ 則)	discrete crack	Mode-Iのみ 混合モード不可	crack離散化 に依存(少)	crack線上以外 の応力評価煩雑
CBM	応力-ひずみ ( $\sigma-\epsilon$ 則)	smeard crack band	混合モード 一応可能	FEM節点数 に依存	対称性を 考慮できず

も倍精度演算を要する。解析は、初期ノッチ先端から離散点が引張強度  $f_t$  に達し次々に進行する形で進められ、荷重増分法に似るが、若干それとは異なり、クラック増分法とでも呼ぶべきものである。離散点が、引張強度に達した後の軟化構成則 (FCMの場合  $\sigma-w$  則と呼ぶ) は一般に、

$$\sigma_i = \sigma_i(w_i) \text{ or } w_i = w_i(\sigma_i); \sigma_i = P_i / A_i \quad (A_i: \text{離散化結合点の支配面積}) \quad (3)$$

の関係にあると考えれば、構造物全体の挙動は式(1), (3)の非線形方程式を解くことによって得られる。 $k+m$  点が  $f_t$  に達したとき (図1) 各離散点では、

$$P_j = 0 \quad j=1, \dots, k-1; \quad P_j = A_j \sigma(w_j) \quad j=k, \dots, k+m-1; \\ w_i = 0 \quad i=k+m, \dots, n \quad (4)$$

が成立し、この条件を導入すると解くべき式は  $(n-k+1)$  元の方程式になる。 $w$  が  $\sigma$  の関数として陽に書ける場合は、左辺の未知量  $\{w\}$  を移項し新しい未知量を作れるので、方程式は代数的になる。このとき撓性マトリクスは対角項のみを書換えればよい。また、 $\sigma-w$  則が任意関数の時は、Newton-Raphson 法等の修正反復解法による必要がある。本論文は、 $\sigma-w$  則として bi-linear モデル (図2) を用いているので前者に相当する。以上の定式化では非対称非正定値マトリクスを解くことになり、解法には Crout 法等を用いる必要がある。

### 3. bi-linear型軟化則を用いた3点曲げ試験の基本的挙動

#### 3.1 $\sigma-w$ 則の形状と構造物の全体挙動

P. E. Petersson の3点曲げ梁の解析 [5] から異なる  $\sigma-w$  則のモデル毎に全体挙動が変わることが分かるが、Petersson と H. W. Reinhardt 等 [7] の実験結果から、ひずみ軟化特性の骨格曲線は少なくとも bi-linear 型で近似すべき形状を有することが分かる。ここで、 $G_F$  一定のまま、bi-linear の形状を

変えて3点曲げ梁の解析を行った。図3 (a) から、構造物全体の挙動である荷重-荷重点変位 (以下  $P-d$ ) 曲線はモデル形状により著しく異なる事が分かる。ここでは、引張強度  $f_t$  も変化させられており、その影響が大きいかのようだが、たとえ  $f_t$  が変化しなくても、他のパラメータにより最大荷重などの全体挙動は大きく変化し、軟化特性が構造物の挙動に与える影響は大である (図3 (b))。コンクリートの構造解析の視点からは材料特性値  $G_F$  よりも、ひずみ軟化則を重要な特性として適切に設定しなければならぬことが確認できる。

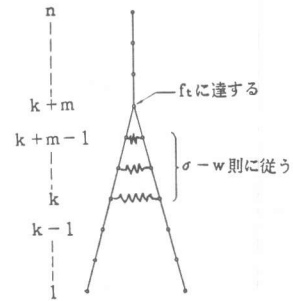


図1. 破壊領域の離散化点

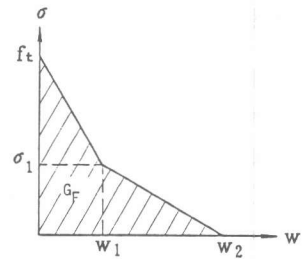


図2. Bi-linear型軟化モデル

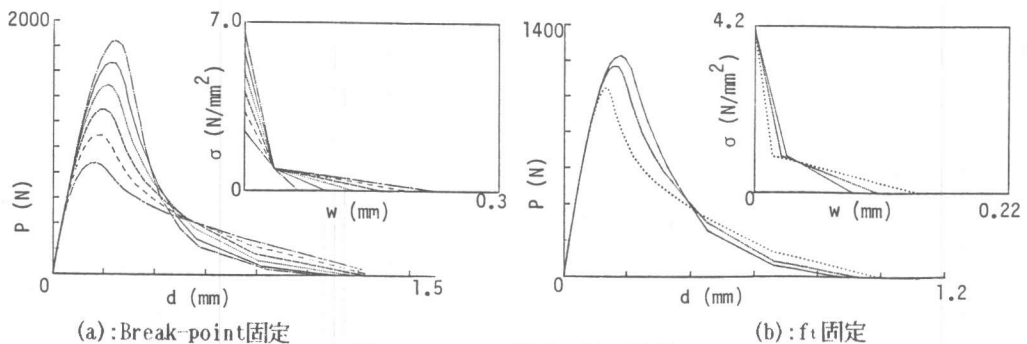


図3. Bi-linear特性と梁の挙動

### 3.2 除荷時挙動

破壊力学試験におけるCompliance法などでは、載荷・除荷が施されるが、この挙動も2で述べた方法を応用して求めることが可能である。これにより、破壊領域の進行に伴うComplianceの変化の有する情報を、後に述べる推定解析に取り入れることが可能になる。仮想クラックが進展している際に、その時点までに解放されたエネルギーは、各離散点*i*の $\sigma_i-w_i$ 曲線下の面積の総和として計算できる。このようにして $\sigma-w$ 則から求めたエネルギーは除荷によって回復しないから、P-d上で載荷曲線と除荷曲線(直線)が囲む消費エネルギーが $\sigma-w$ 則から計算したエネルギーと等しくなるように除荷曲線を直線として決定できる。3点曲げ梁の自重項がない場合の計算例(図4)には、良くみられる除荷過程が現れている。

### 4. 軟化構成則モデルのパラメータ推定

ひとつの $\sigma-w$ 則モデルからP-d曲線を求めることができるが、P.E. Rookstraは、逆に、bi-linear則モデルの形状を変化させて、実験で得られたP-d曲線に最もよく合うようにモデルのパラメータを決定する手法を用いている。ここでは、この手法と派生する問題を整理する。

実験の結果得られる力学的特性曲線(P-dやP-CMOD:荷重・クラック肩口開口変位)を $F_E$ とし、形状がパラメータ $x$ で表わされる軟化構成則モデルを仮定することによって計算される特性曲線を $F_M(x)$ とすると、次の最小2乗式によってパラメータ $x$ を定めることができる[8]。

$$S(x) = \sum [F_E - F_M(x)]^2 \rightarrow \min \quad (5)$$

#### 4.1 bi-linearモデルの最小2乗式

軟化構成則をbi-linearで表現する場合、パラメータを $f_t, \sigma_1, w_1, w_2$ として、式(5)は、

$$S(f_t, \sigma_1, w_1, w_2) = \sum [F_E - F_M(f_t, \sigma_1, w_1, w_2)]^2 \rightarrow \min \quad (6)$$

と書ける。ここでは引張強度 $f_t$ も推定対象として扱う。 $F_M$ は、2で述べた方法で数値的に計算されるものであるから、当然パラメータの線形結合として表現できず、式(6)は非線形最小2乗式となる。従って、モデルのパラメータは反復改良して決定される。本解析では、反復改良法のうちGauss-Newton法を用いた。パラメータの*k*次推定値ベクトルを $x^{(k)}$ とする。真のパラメータによって真の測定値ベクトル $y$ を与えるモデルを $f(x)$ とすると、反復法の基本式は、

$$\Delta y^{(k)} \approx A^{(k)} \Delta x^{(k)}, \quad \begin{cases} \Delta y^{(k)} = y - f(x^{(k)}), \\ \Delta x^{(k)} = x - x^{(k)}, \end{cases} \quad \Lambda_{ij}^{(k)} = \left[ \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right]_{x=x^{(k)}}$$

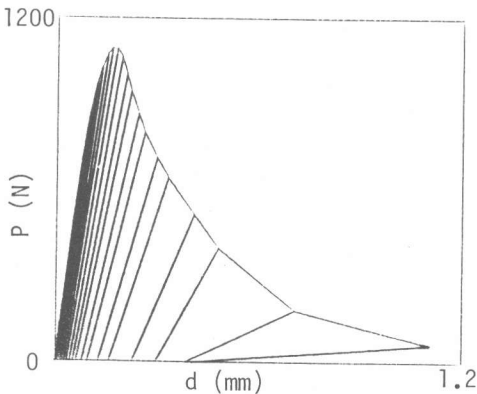


図4. 除荷曲線のシミュレーション例

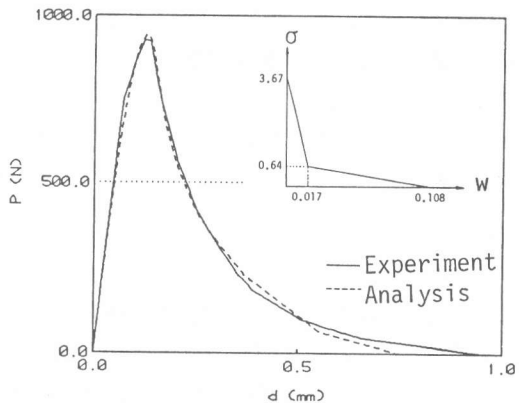


図5. 切欠き梁の3点曲げ試験のパラメータ推定例

上式の解法には計算精度の向上のために、QR分解を用いた。RILEM推奨の3点曲げ試験結果についてのパラメータ推定の計算例を図5に示す。

#### 4.2 逆問題

上記のパラメータ推定手法は、逆問題(Inverse Problem)の一種である。したがって、現象のモデル化がなされ、観測データがあればあらゆる定式化がなされる。逆問題として取り扱う際重要なことは、定式化ではなくモデル化そのものであり、モデルの成立する仮定や条件を検討することが必須である。本論では、軟化モデルのパラメータ推定の他に、CT試験に存在する寸法効果を取りあげ、これを逆問題の立場から説明する試みを行った。その結果は5で示す。

#### 4.3 推定問題の数値計算上の問題

上述の、定式化になら困難はないのだが、計算機を用いる実際の計算では、非線形問題を区分的線形に置き換えて解くため、得られた解は多かれ少なかれ誤差を含んでいる。これはよく知られている数値的な問題だが、解へ与える影響を調べておくことは重要である。

(i) 数値微分：最小2乗式のヤコビ行列は $F_n$ が陽な関数ではないので、数値微分によって求める。この精度は、数値微分の刻みを細かく採ることによりある程度向上する。しかし、刻みを細かくし続けると、桁落ちによる丸め誤差が入り逆に精度は悪化する。桁落ちの影響は単純に倍精度演算によって回避した。数値微分の刻みは、各推定値の最大有効桁位の $10^{-3}$ が適当であった。このことは、その前後の刻みを用いた場合に比べ推定値がほとんど変化しないことから判断した。

(ii) 初期値：反復改良法では、反復の初期値の与え方が解に影響を与える。Gauss-Newton法は1次の線形近似であるため、初期値が真の解の近傍にない場合は発散して解を得ることができない。また、本論のように真の解が元々未知な問題では、物理的な意味付から解の信憑性を問う以外に方法がない。真の解の近傍にあると考えられる初期値からは、推定値は約5%の範囲で一定の値に近づくことを確認している。

(iii) 収束判定：反復改良法では、収束判定の基準の設定も問題になる。収束判定を厳しくしても丸め誤差範囲内に入ってしまうと、演算が無限ループに入って解が得られない。逆に判定基準を緩くし過ぎると、真の解から離れたところで収束する危険が生じる。本解析では、残差の2乗和の減少量 $\Delta S = S(x^{(k+1)}) - S(x^{(k)})$ と、各値の修正値によって収束判定している。さらに、推定値が一定値のまわりで小さく振動したまま収束判定されない状況を回避するため、過去数ステップの修正値の平均値の変化量も判定基準に含めた。図6には、典型的な推定過程を示した。

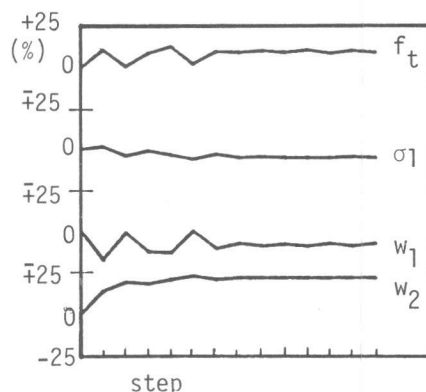


図6. 推定解析における推定値の変動例

### 5. CT試験を用いたパラメータ推定解析

#### 5.1 実験概要

CT試験は、剛性の高い変位制御型の装置を用い、図7に示すような引き裂き型の荷重を与えるものである。この方法では、自重がローラ部で支持されているため自重による破壊エネルギーを考慮する必要がない。試験体は、寸法効果を調べる目的から同じ性質のコンクリートについて表2に示すような寸法の異なる3種類を各6体ずつ用いた。これらはそれぞれ、寸法の小さい順

にCT10、CT20、CT30とシリーズ名が付けられている。CT試験からはP-d曲線とP-CMOD曲線が得られる。しかし、寸法の最も小さいCT10シリーズの試験体には、寸法の関係で荷重点に変位計を設置することができなかったため、P-CMOD曲線しか得られていない。

## 5.2 推定結果

CT試験のP-d、P-CMODの曲線を用い $\sigma$ -w則のbi-linearモデルのパラメータ推定を行った。解析に用いる各撓性(式(1))を求めるためのFEM解析モデルの要素(8-nodes-isoparametric)数は112、節点数は391である。撓性行列次数は65である。P-CMODを用いた推定結果図8からわかるように、 $G_f$ は試験体の寸法の増大に伴って増加しており、明らかに寸法効果が存在する。図9からは、寸法に最も影響されるパラメータは $w_2$ であることがわかる。 $w_2$ は、破壊領域における応力伝達 $\sigma$ が0になるときの限界開口変位である。FCMでは、大きさを持った破壊領域は、無限小のFictitious Crackに置き換えられており、 $w_2$ が大きくなるということは、破壊領域の大きさが試験体寸法に伴って変化するためと考えられる。 $\sigma$ -w則のbi-linearモデルにおいて、第1勾配はリガメント内のmicrocrack領域形成過程に対応し、第2勾配はそのmicrocrackの連結の過程に対応すると推察され、この領域が寸法の増大に伴って応力方向に広がると考えられるなら、第2勾配の直線が長くなることが理解できる。

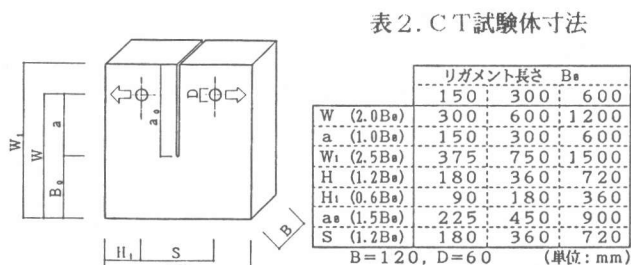


図7. CT試験法

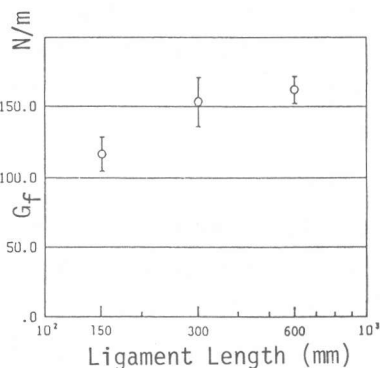


図8. CT試験に基づく $G_f$ の推定値

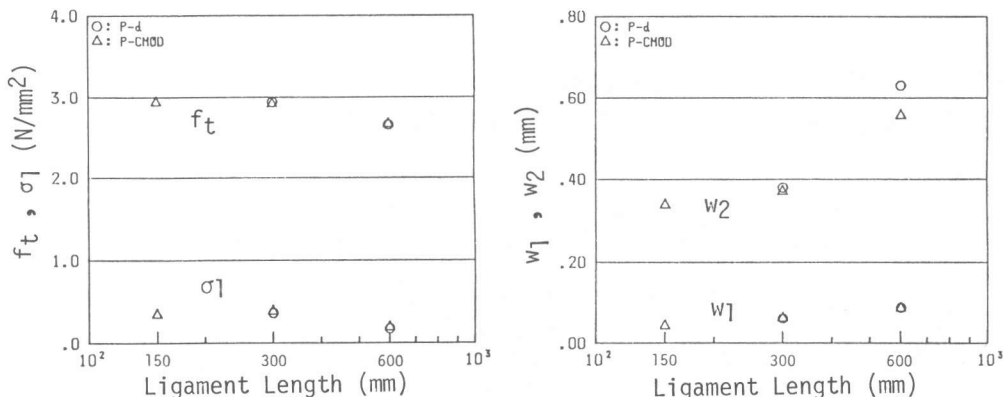


図9. CT試験に基づくパラメータ推定値

### 5.3 寸法効果の解析

試験体寸法の増大が破壊領域の広がり方を変化させることが示唆されたが、破壊領域の広がり方は、リガメント内で一様ではないと考えられる。そこで、軟化構成則モデルのパラメータのうち寸法に最も影響される $w_2$ がリガメント内で一様ではなく分布すると仮定し、その分布形状の推定を試みた。

即ち、 $w_2$ に2次の分布、 $w_2 = P_1 + P_2 \times LIG + P_3 \times LIG^2$  ( $\times LIG$ はノッチ先端から距離)を与え、 $f_t, \sigma_1, w_1$ の値は5.2の解析結果から得られた平均値とし、分布式的パラメータ $P_i$ を推定した。推定結果図10は、原点を初期ノッチ先端にとり、横軸に $\times LIG$ を、第4象限に推定結果である $w_2$ の分布を、第1象限に $G_f$ の分布を示している。リガメント上でコンクリートの性質が変わるとは考えられないから、 $G_f$ や $w_2$ が分布するというは、破壊領域がリガメント長さに従い応力方向に分布しながら変化すると考えてよいであろう。試験体寸法が小さい場合は末広りの形状を示し、試験体の寸法がある程度

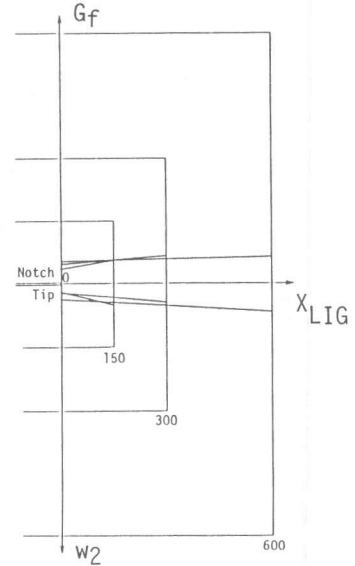


図10. 推定された $w_2$ と $G_f$ の分布

の大きさ(リガメント300mm程度)になると一定の幅に近づいてくる。以上は、軟化構成則を推定するものではなく、構成則のパラメータに破壊領域の広がりに対応させることを試みたものである。軟化挙動は、軟化則が分布しないものに比べマイクロに扱われていることになる。この場合、材料固有の $w_2$ は、分布の定数項であると考えてよい。

### 6. 結論

FCMは、破壊領域を一本の仮想クラックで表現したモデルであるために、そのままの形で破壊領域の広がりを表現するのは不可能である。仮想クラックを領域的に配することも考えられるがアルゴリズムが極めて煩雑になる。むしろ、破壊領域を要素幅で表現できるCBMを採用する方が有利である。いずれにしろ単位破壊領域では、軟化則が必要であり、リガメント上で破壊領域が変化するときにはかに単位破壊領域を特定するかが問題となる。一つの方法として、分布する軟化則モデルの推定から定数項を採用する方法が考えられる。また、試験体寸法が大きくなり破壊領域に一定の幅が認められるとするならば、平均的なパラメータを用いることが可能である。

### 7. 謝辞

解析に用いた実験の全ては、日本学術振興会の援助により、スイス連邦工科大学ローザンヌ校建設材料研究所と共同で行ったものであり、ここに謝意を表します。

### 参考文献

- [1] 三橋博三:コンクリートの破壊力学の現状と展望, コンクリート工学, vol. 25, No. 2, pp. 14-25, 1987.
- [2] 50-FMC, draft RILEM Recommendation: Determination of the Fracture Energy of Mortar and Concrete by Means of Three Point Bend Tests on Notched Beams, Materials and Structures, Vol. 18, No. 106, pp. 33-39, 1985.
- [3] Hillerborg, A.: The Theoretical Basis of a Method to Determine the Fracture Energy  $G_f$  of Concrete, Materials and Structures, Vol. 18, No. 106, pp. 291-296, 1985.
- [4] Roelfstra, P. E. and Wittmann, F. H.: Numerical Method to Link Strain Softening with Failure of Concrete, Proc. of Conf. on Fracture Mechanics of Concrete, vol. 1, pp. 127-139, 1985.
- [5] Petersson, P.-E.: Crack Growth and Development of Fracture Zones in Plane Concrete and Similar Materials, Report TVBM-1006, Lund Univ., Sweden, 1984.
- [6] Bazant, Z. P. and Oh, B. H.: Crack Band Theory for Fracture of Concrete, Materials and Structures, vol. 16, No. 93, pp. 155-177, 1983.
- [7] Reinhardt, H. W.: Fracture Mechanics of an Elastic Softening Materials like Concrete, HERON, Vol. 29, No. 2, 1984.
- [8] 中川徹、小柳義夫: 最小2乗法による実験データ解析、UP数学応用選書7、東京大学出版会、1982.