

[2019] ひびわれ界面のせん断伝達 (Fモードひびわれ) に関する解析モデル

正会員 ○吉川弘道 (間組 技術研究所)
正会員 田辺忠顕 (名古屋大学工学部)

1. はじめに

ひびわれ界面では、その接線方向 (t 方向) に沿って、せん断応力と τ_{nt}^c とせん断すべり δ_t が生じる一方で、ひびわれ界面直交方向 (n 方向) にもひびわれ幅 δ_n の開口や垂直応力 σ_n^c (この場合は圧縮) の増大が励起され、界面の力学 4 量全てが干渉しあう複雑な力学挙動を呈する(図-1)。本文は、ひびわれ界面における構成モデルを提示し、これまで個々に議論されてきた、不連続面でのせん断伝達、かみ合い効果、クラック・ダイラタンシー、クーロン摩擦を総括的に取り扱うものである。

2. ひびわれ界面の構成方程式

ひびわれ界面における力学挙動を合理的に論ずるには、2次元問題の場合、作用応力 (τ_{nt}^c, σ_n^c) と不連続変位 (δ_t, δ_n) の力学 4 量に関係づける構成方程式を定式化する必要がある[1]。そこで、既往の実験的事実に鑑み、一般に次のようなことが言える。

すなわち、せん断すべり δ_t は、同方向のせん断応力 τ_{nt}^c に依存するばかりでなく、そのときのひびわれ幅 δ_n にも影響される。一方、垂直応力 σ_n^c (< 0) は、 δ_n が拘束されたときせん断応力 τ_{nt}^c によっても励起される。従って、次式のような力学 4 量の構成関係から出発する。

$$\begin{aligned} \delta_t &= \delta_t(\tau_{nt}^c, \delta_n) \\ \sigma_n^c &= \sigma_n^c(\delta_n, \tau_{nt}^c) \end{aligned} \quad (1)$$

上式に連鎖則を適用し、その全微分をとると次式が得られる。

$$\begin{aligned} d\delta_t &= \frac{\partial \delta_t}{\partial \tau_{nt}^c} d\tau_{nt}^c + \frac{\partial \delta_t}{\partial \delta_n} d\delta_n, \\ d\sigma_n^c &= \frac{\partial \sigma_n^c}{\partial \delta_n} d\delta_n + \frac{\partial \sigma_n^c}{\partial \tau_{nt}^c} d\tau_{nt}^c \end{aligned} \quad (2)$$

式(2)に含まれる 4 個の各偏導関数に対して、次のような 4 係数を定義する。

$$\begin{aligned} k_t &\equiv \left(\frac{\partial \delta_t}{\partial \tau_{nt}^c}\right)^{-1}, \quad k_n \equiv \frac{\partial \sigma_n^c}{\partial \delta_n}, \\ \mu_f &\equiv \left(\frac{-\partial \sigma_n^c}{\partial \tau_{nt}^c}\right)^{-1}, \quad \beta'_d \equiv \left(\frac{\partial \delta_t}{\partial \delta_n}\right)^{-1}, \quad \beta_d \equiv \frac{\partial \delta_n}{\partial \delta_t} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 k_t はせん断剛性、 k_n は垂直剛性 (ともに MPa/mm で表わされる) を示し、 μ_f を摩擦係数、 β_d をダイラタンシー比 (両者を交叉係数とよび、無次元量で表わされる) とする。式(3)を式(2)に代入すると下式を導くことができる。

$$\begin{Bmatrix} d\delta_t \\ d\sigma_n^c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{k_t} & \frac{1}{\beta'_d} \\ -\frac{1}{\mu_f} & k_n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d\tau_{nt}^c \\ d\delta_n \end{Bmatrix} \quad (4)$$

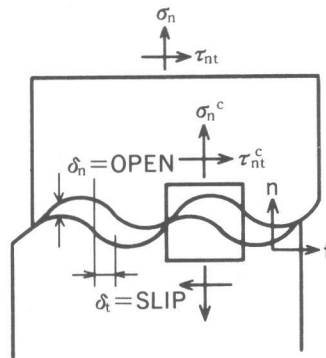


図-1 不連続面における力学 4 量の定義

表-1 界面の力学 4 量と基本 4 係数の相関関係

界面 4 量	せん断応力 τ_{nt}^c	垂直変位 $\delta_n > 0$ (ひびわれ幅)
せん断変位 δ_t (すべり量)	せん断剛性 k_t	ダイラタンシー比 β_d
垂直応力 $\sigma_n^c < 0$	摩擦係数 μ_f	垂直剛性 k_n

式(3)で新たに定義した各係数を“基本4係数”と総称し、その物理的意味ならびに力学4量との相関関係を表-1に示した。式(1)、(4)は、変位成分と応力成分を混在させて記述していることが特徴的で、通常の連続体力学における応力～ひずみ関係とは異なる。

上式を通例の応力～不連続変位関係に書直すと、最終的に次式を得る。

$$\begin{Bmatrix} d\delta_t \\ d\delta_n \end{Bmatrix} = \frac{1}{\xi k_t} \begin{Bmatrix} 1 & (1-\xi)\mu_f \\ \beta_d & \mu_f\beta_d \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d\tau_{nt}^c \\ d\sigma_n^c \end{Bmatrix}, \quad \xi = \mu_f \beta_d \frac{k_n}{k_t} \quad (5)$$

式(5)が、著者らの提案する、ひびわれ界面における増分型構成方程式であり、せん断伝達機構に加えて、垂直剛性あるいは、交叉効果（クラック・ダイラタンシー、クーロン摩擦）をも表現することができる。同式は非対称形であるとともに、 $\xi = 0$ のとき特異($\det[F] = 0$)となり、 $\xi > 0$ の条件下で正定値となることが保証され、重要な数学的意義をもつ。

3. 基本4係数のモデル化と実験定数の同定

式(5)に含まれる基本4係数 (k_t , k_n , β_d , μ_f) をモデル化し、これらを具体的な実験式として提供することによって、本提案手法は完成する。そこで、まず、2つの剛性 (k_t , k_n) のモデル化を図-2, 3に示した。

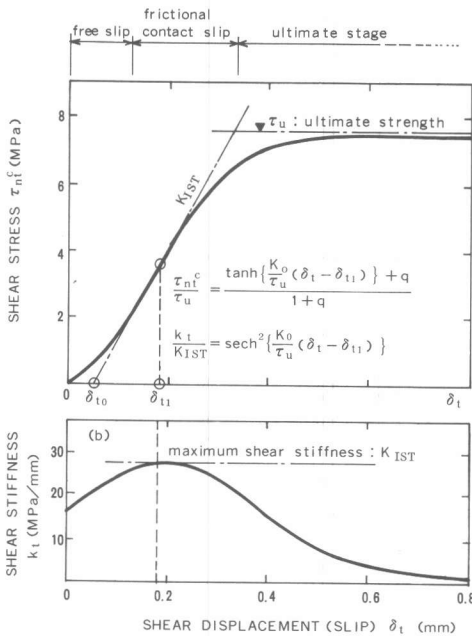


図-2 (a)せん断応力 τ_{nt}^c とせん断すべり δ_t の関係、および(b)せん断剛性に関するモデル化

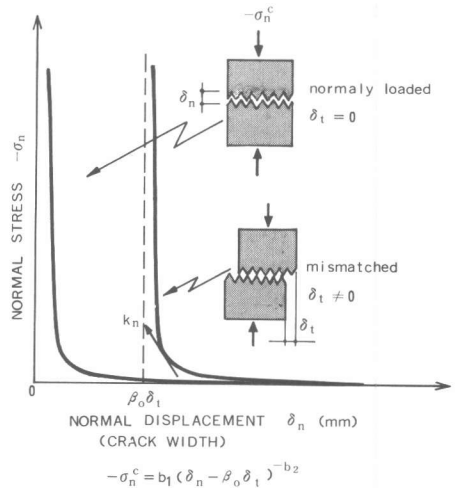


図-3 ひびわれ界面における垂直応力 σ_n^c とひびわれ幅 δ_n の関係に関するモデル化

ひびわれ界面でのせん断すべり δ_t は、ひびわれ幅 δ_n を一定にした場合、初期にややルーズなすべりがあり、その後、骨材のかみ合いにより剛性が回復し、やがて頭打ちになることが実験的に認められている。そこで、これらを一般化して、 $0 \sim \delta_{t1}$ 間で接線剛性 k_t が徐々に増大し、 $\delta_t = \delta_{t1}$ で最大剛性 K_{IST} となり、その後剛性は低下し、やがて最大せん断強度 τ_u に漸近する双曲線関数を仮定した(図-2)。

一方、ひびわれ界面の垂直方向の変形は、垂直応力 $-\sigma_n^c$ (圧縮応力)の増加によってひびわれ開口幅は $\delta_n = 0$ に向かって閉合するが、せん断方向に不整合 δ_t があった場合、完

全には閉合できず、 $\delta_n = \beta_d \delta_t$ を漸近線にとるもので、係数 b_1, b_2 で決定される指数関数を用いた (図-3)。

交叉係数のモデル化については、摩擦係数 μ_f をひびわれ幅 δ_n に対する単調増加関数、ダイラタンシー比 β_d を垂直応力 σ_n^c の単調減少関数とし、各々 e 関数で表わした。これらを図-4, 5 に示す。

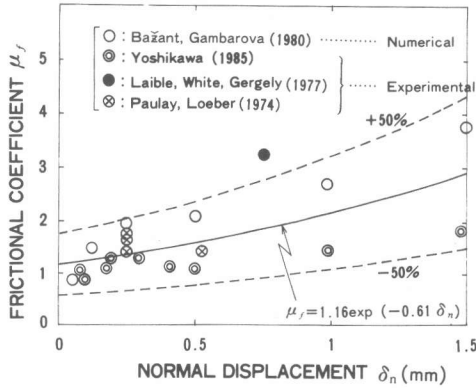


図-4 摩擦係数 μ_f に関する実験結果のまとめと最小自乗法による近似曲線

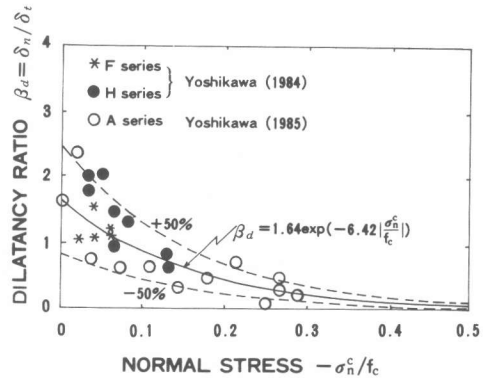


図-5 ダイラタンシー比 β_d に関する実験結果のまとめと最小自乗法による近似曲線

以上の基本4係数の関数形を表-2に整理・一覧化し、さらに、既往の実測結果を用い、最小自乗近似により各係数を求め、これらを同表に付記した。これらは、コンクリート材料を用いた国内外の8研究グループ約120供試体による実験結果より回帰したものである。同表で、 f_c はコンクリートの圧縮強度 (MPa)、 D_a は粗骨材の最大寸法 (mm)、 τ_0 はコンクリートのせん断強度 (ひびわれのない場合) を表わす。

交叉係数 μ_f および β_d については、図-4, 5 に示したとおり比較の大きなばらつきを呈するもので、実験結果は大略 $\pm 50\%$ に散在している。このことは、骨材粒度や界面粗度などさらにいくつかの材料パラメーターを必要とすることを意味する。従って、さらに広範囲の実験が必要であるが、本論では修正係数 c_1 および c_3 (いずれも $0.5 \sim 1.5$ をとる) を導入するものとした。

表-2 ひびわれ界面の基本4係数 (k_t, k_n, μ_f, β_d) の提案曲線と各係数の同定値

SHEAR STIFFNESS : k_t [MPa/mm]	CONSTANTS	NORMAL STIFFNESS : k_n [MPa/mm]	CONSTANTS
$k_t = K_{IST} \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{K_0}{\tau_u} (\delta_t - \delta_{t1}) \right\}$		$k_n = b_1 b_2 (\delta_n - \beta_d \delta_t)^{-(b_1+1)}$	$b_1 = 0.0082$ $b_2 = 0.878$
$K_{IST} = a_1 \left(\frac{f_c}{25} \right)^{a_2} \left(\frac{D_a}{16} \right)^{a_3} \delta_n^{-a_4}$	$a_1 = 3.74, a_2 = 0.60$ $a_3 = 0, a_4 = 0.96$	FRICITION RATIO : μ_f	CONSTANTS
$\delta_{t1} = a_5 \left(\frac{f_c}{25} \right)^{a_6} \left(\frac{D_a}{16} \right)^{a_7} \delta_n^{a_8}$	$a_5 = 1.42, a_6 = 0$ $a_7 = 1.20, a_8 = 1.31$	$\mu_f = c_1 \mu_0 \exp(c_2 \delta_n)$	$\mu_0 = 1.16$ $c_1 = 0.5 \sim 1.5$ $c_2 = 0.61$
$\tau_u = \tau_0 a_{10} + (\delta_n / D_a)^{a_{11}}, \tau_0 = a_{12} f_c$	$a_9 = a_{10} = 0.01$ $a_{11} = 2$	DILATANCY RATIO : β_d	CONSTANTS
$K_0 = K_{IST} (1 + q), q = \tan h \left(\frac{K_0 \delta_{t1}}{\tau_u} \right)$	$a_{12} = 0.2 \sim 0.3$ (0.245)	$\beta_d = c_3 \beta_0 \exp \left(-c_4 \left \frac{\sigma_n^c}{f_c} \right \right)$	$\beta_0 = 1.64$ $c_3 = 0.5 \sim 1.5$ $c_4 = 6.42$

4. 数値シミュレーション

上記の構成方程式と基本4係数を用い、種々の条件下における力学挙動について数値シミュレーションを実施した。図-6は、ひびわれ幅 δ_n を与えたときの、せん断すべり δ_t とせん断応力 τ_{nt}^c との関係、コンクリート強度 f_c を2ケース変えて三次元表示したも

のである（骨材の最大寸法 $D_a = 25 \text{ mm}$ は一定）。これらにより、不連続変位 δ_n と δ_t によるせん断応力 τ_{nt}^c の変化、および f_c の影響を見ることができる。（ただし、せん断応力の応答値は、不連続変位の経路に依存し、図-6 は最初に δ_n を与えた後これを一定値とし、 δ_t を増加させた場合である。）

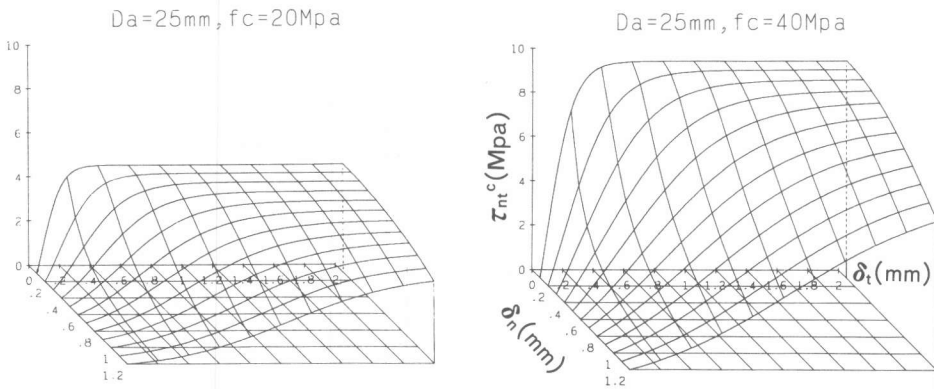
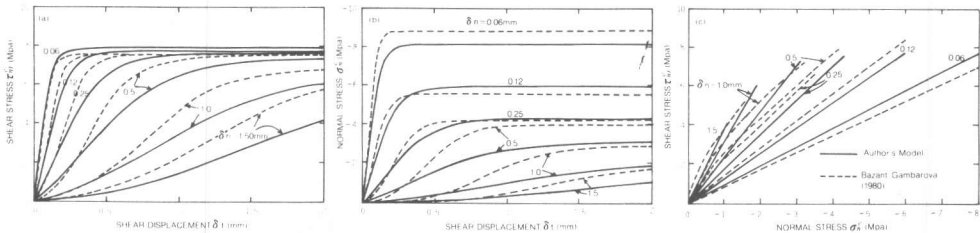


図-6 ひびわれ界面における不連続変位 δ_n , δ_t とせん断応力 τ_{nt}^c の関係（数値シミュレーション）

図-7 は、Bazant・Gamborova モデルによる数値計算結果（文献〔2〕の Fig.4）に著者らによる提案モデルを加え、両者を対応させたものである。（同図は、不連続面の一定垂直変位 δ_n （ひびわれ幅）をパラメータとする変位制御による数値シミュレーションである）。同図より、両モデルの良否を直接論ずるものではないが、傾向的にはほぼ同様な数値計算結果を与え、両モデルとも実在の非線形力学挙動を定性的によく表現していると言える。



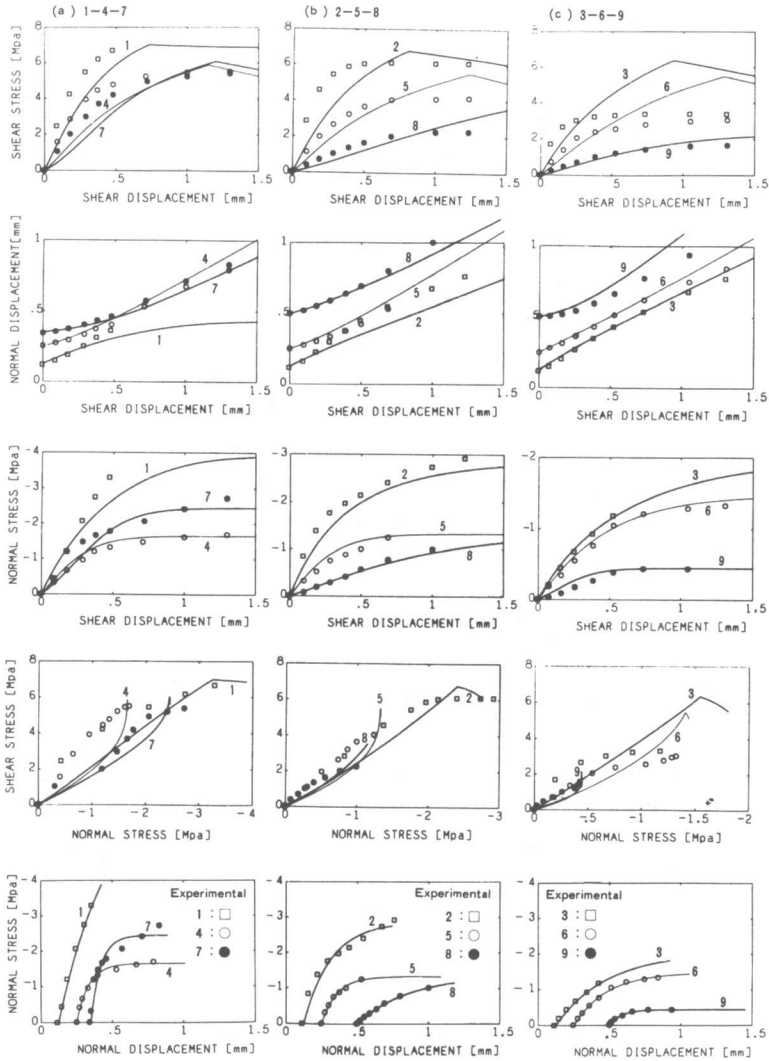
Model	Author's Analysis		
Direct Shear of Cracked Concrete under δ_n -Controlled Loading		$f_c = 31 \text{ MPa}$	$a_{12} = 0.245$
		$D_a = 25 \text{ mm}$	$c_1 = c_3 = 1$
		$r_s = 10^8$	$\Delta \delta_t = 0.01 \text{ mm}$

図-7 本提案モデルと Bazant, Gamborova モデル（1980）〔2〕との比較（ひびわれ幅 δ_n 一定とした場合の数値シミュレーション）

図-8 は、ひびわれ面直角方向に埋設鉄筋を有する供試体を用いた直接せん断実験（Millard, Johnson〔4〕）に、解析値を併記したものである。同図の実験は、拘束鉄筋の鉄筋量および初期ひびわれ幅をパラメータとする9種の実験結果で、これらを各々□

○■にて記し、解析値を実線で示した。(詳細な実験条件については図-8脚注の付表参照)。本実験は、界面の力学4量全てが測定されている貴重な実験結果であるが、図-8より、初期ひびわれ幅および拘束鉄筋剛性の影響を知ることができるとともに、著者らの提案手法に基づく解析値もこれによく追従している。

Direct Shear Tests by Millard, Johnson (1985)



Analytical Condition

ξ	a_{12}	c_1	c_3	Initial crack width δ_{no} (mm)			Concrete
				□ 1 : 0.125	□ 2 : 0.125	□ 3 : 0.125	
0.5	0.245	1	0.5	○ 4 : 0.25	○ 5 : 0.25	○ 6 : 0.25	$f_c=30\text{Mpa}$ $D_a=16\text{mm}$
				● 7 : 0.35	● 8 : 0.50	● 9 : 0.50	

図-8 埋設鉄筋を有する場合の本提案モデルと実験結果 (Millard, Johnson (1985) [4]) との比較

5. 複数のひびわれが存在する場合の構成マトリックス

以上までは、唯一本のひびわれに着目し、その力学挙動を表わす構成方程式について述

べてきたが、これは Joint 要素などいわゆる Interface 要素を採用することにより、有限要素解析が実行できる。さらに、鉄筋コンクリート平板のせん断実験に観測されるような、比較的規則的に分布するひびわれの取扱いを考え、いわゆるひびわれコンクリート (cracked concrete) を対象とする構成マトリックスを導出する。

まず、複数散在するひびわれ群のひびわれ間隔 L_c (相隣るひびわれ間の最短距離) が既知であるとし、次のようなクラックひずみベクトルを算定する。(ひびわれ直角方向を n 、平行方向を t として添字を用いている。)

$$\{d\epsilon_{cr}\} \equiv \begin{Bmatrix} d\epsilon_n^{cr} \\ d\epsilon_t^{cr} \\ d\gamma_{nt}^{cr} \end{Bmatrix} = \frac{1}{L_c} \begin{Bmatrix} d\delta_n \\ 0 \\ d\delta_t \end{Bmatrix} = \frac{1}{\xi k_t L_c} \begin{Bmatrix} \mu_f \beta_d & 0 & \beta_d \\ 0 & 0 & 0 \\ (1-\xi)\mu_f & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d\sigma_n^c \\ d\sigma_t^c \\ d\tau_{nt}^c \end{Bmatrix} = [F] \{d\sigma_c\} \quad (6)$$

すなわち、クラックひずみの nn 成分は、ひびわれ幅 δ_n をひびわれ間隔で、 nt 成分はせん断すべり δ_t をひびわれ間隔で除したものである [3]。ここで、 $[F]$ は上式第 4 項の係数マトリックス ($(MPa)^{-1}$ の次元をもつ) を表わす。つぎに、全ひずみ $\{d\epsilon\}$ が、コンクリート本体の弾塑性ひずみ $\{d\epsilon_{sc}\}$ およびクラックひずみ $\{d\epsilon_{cr}\}$ の和で表わされると仮定すると、コンクリート本体の構成方程式は次式のように表わすことができる。

$$\{d\sigma_c\} = [D_c] \{d\epsilon_{sc}\} = [D_c] (\{d\epsilon\} - \{d\epsilon_{cr}\}) \quad (7)$$

ここで、 $[D_c]$ は、ひびわれを含まないコンクリート本体の構成マトリックスで、これまで数多く提案されている非線形弾性もしくは弾塑性マトリックスをそのまま導入すればよい。式(7)に、式(6)を代入し整理すると次式を得る。

$$\{d\sigma_c\} = ([I] + [D_c][F])^{-1} [D_c] \{d\epsilon\} \quad (8)$$

ここで、 $[I]$ は単位マトリックスである。さらに、ひびわれを含むコンクリート (cracked concrete) 全体を表わす等価な剛性マトリックス $[D^*]$ として、

$$[D^*] = [\psi][D_c], \quad [\psi] = ([I] + [D_c][F])^{-1} \quad (9)$$

を得ることができる。ここで、 $[\psi]$ は、健全な剛性マトリックス $[D_c]$ に対する、ひびわれの存在による劣化程度を表わす無次元マトリックスと考えることができる。

著者らの提案する等価剛性マトリックス (式(9)) を、通常の接線係数法による有限要素コードに持込むことによって、分布ひびわれを有するコンクリートを連続体力学の範囲内で、容易かつ合理的に解くことができると考えられる。(ただし、非対称マトリックス $[F]$, $[\psi]$, $[D^*]$ に対する何等かの処理が必要である。)

<参考文献>

- [1] 吉川・田辺; コンクリート部材のひびわれ界面における力学挙動に関する解析的研究, 土木学会論文集, 第372号/V-5, pp.101~110, 和61.8,
- [2] Bazant・Gambarova; Rough Cracks in Reinforced Concrete, ASCE, No ST4, pp.819~842, 1980., April,
- [3] H. Yoshikawa, T. Tanabe; A Finite Element Model for Cracked Concrete, Proceedings of Japan-US Joint Seminar on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures, May, 1985, pp.214~225, (Approved for publication by ST Div., ASCE)
- [4] Millard, S.G., and Johnson, R.P.; Shear Transfer in cracked Reinforced Concrete, Magazine of Concrete Research, Vol. 37, No 130, March, 1985, pp. 3-15