［8］ コンクリートの力学的特性と破壊力学

正会員　三橋　博三　（東北大学工学部）

1．はじめに

コンクリートは、種々の岩石（骨材）が多孔質なセメントペーストで結合された非均質な多相構造を有する人工石であるために、その力学的特性は骨材と硬化セメントペースト双方の特性に依存する事は勿論の事、その相互作用の影響をも受ける。従って、この様に複雑な複合材料の力学的特性を合理的に把える為には、その内部構造の特徴を把握し、各々の相の作用メカニズムを解明すると共に、それらの結果を実際に観察される全体的な挙動と合理的に関係づける必要がある。またコンクリートの非線形挙動の多くは、微細なひび割れの発生・成長・連結・累積に基因することから、ひび割れ伝播特性を知悉することは極めて重要な研究課題の一つである。

そこで、本稿では、コンクリートの力学的特性を研究する際の基礎となる非均質な内部構造のレベル分けとそれらの相互関係について述べる。更に、ひび割れ伝播特性を合理的に表わす手法として発展しつつあるコンクリートの破壊力学について概説する。

2．コンクリートの力学的特性と内部構造

コンクリートは、主として硬化セメントペーストと大小様々な岩石と水からなる多孔質な複合材料であり、荷重条件や環境条件等によってその力学的特性は複雑に変化する特徴がある。円柱や角柱などのコンクリート供試体あるいは柱・はり・壁などの鉄筋コンクリート部材の全体的な挙動について膨大な実験的研究が行われ、その結果に基づいて作成された種々の経験則によってコンクリート構造物の設計がなされてきた。その一方では、種々の複雑な現象や挙動が何故生起するのかを調べる研究も数多くなされてきたが、これ等の成果が直接設計に結びつけられることは少なかった。

このように、コンクリートの力学的特性を精しく把握しようとする際、その複合構造としての特殊性あるいは湿度や温度などの環境条件への敏感性などを充分に考慮されない場合には、その結果として得られた結論は間違いとまでは言えなくとも疑わしいものとなる危険性がある。

近年、かっては見られなかった新しいタイプの巨大かつ複雑な機能を有するコンクリート構造物が社会的要請に合わせて次々と出現しているが、その中には従来用いられてきた経験則の適用範囲を大きく超えた規模や使用条件にあるもの、あるいは適切な大きさの供試体を用いて必要とされる種々の条件に対する挙動を全て実験で詳しく調べることが困難な状況も出て来ている。また、コンピュータの発達に伴い、応力解析技術は目覚しい進歩をとげ、その解析精度に見合った構造材料及び部材の力学的特性に関する高精度の情報も必要となってきている。

より汎用性と信頼性に富む構成法則を求める１つの方法として、観察された挙動を詳細な内部構造と実際のメカニズムに結びつけて考えるアプローチの重要性がWittmannによって指摘され[1)]、更に実験的研究と理論的な考え方と強力な計算機を用いたシミュレーション手法を併用した総合的な研究手法のみが現代的な構造解析に直接利用し得る構成法則を導き出すと言われている。[2)]

コンクリート材料の内部構造レベルを分類するならば、表１の様に整理されよう。例えばコンクリートの破壊について例をあげるとすれば、１００㎜あるいはそれ以上のオーダーのものを

表1　コンクリート材料の内部構造レベル

(* Representative Volume Element)

構造レベル	非均質性の因子	RVE*のオーダー	応力ー歪特性	モデルのタイプ
マクロレベル（巨視）	疑似均質	１００㎜以上	non-linear	構造工学モデル
メゾレベル（中間）	介在物（骨材）大きい空隙	０．１～１０㎜	quasi-linear	材料工学モデル
ミクロレベル（微視）	小さい空隙	０．１㎜以下	ほぼ　linear	材料科学モデル

扱うMacro（巨視）levelでは、コンクリート全体の破壊強度あるいは平均応力ー平均歪の非線形特性などを主な研究対象とする。また０．１㎜～１０㎜位のオーダーのものを扱うMeso(中間) level ではひび割れ発生や伝播、破壊過程あるいは破壊機構などを主な研究対象とする。更に、０．１㎜以下のオーダーのものを扱うMicro（微視）levelでは、微細な空隙まわりのクラック挙動、水和生成物等の内部構造形態あるいはそれらが微細クラックに及ぼす影響などを研究対象とし、顕微鏡あるいは電子顕微鏡による観察などを基礎に研究がなされる。

此れ等３つの構造レベルは一種の階層構造をなしており、Micro level で表現された全過程はMeso levelの現象を解釈するのに直接用い事ができるが、Micro level の結果がそのままMacro level の挙動の解釈に用いることはできずMeso levelの検討を経なければならない。また、Macro levelでは、複合非均質材料を疑似均質材料と見なす事によって必然的に実際のメカニズムを取り扱う事はなく、あくまで見かけ上の挙動が対象となる。尚、対象が構造部材となると、コンクリートは基本的に均質材料として取り扱われ、例えば有限要素法により部材内のひび割れ挙動を解析するモデルはＦＥＭミクロモデルと呼ばれている。[3)]

３．「破壊力学」入門[4),5)]

個体の破壊は、原子と原子あるいは分子と分子の結合が切断される事により引き起こされる。従って、ひび割れを有する部材の破壊挙動を精確に把握する為には、ひび割れ先端近傍の原子あるいは分子一つ一つの挙動を、その周りに分布するあらゆる介在物との相互作用などを考慮しながら追求していかなければならないが、現実的にはほとんど不可能に近い。そこでひび割れ先端近傍に於いて厳密に何が起こっているのかを不問のままに、もう少し巨視的なレベルの力学的状態量を表現できるパラメータを用いてひび割れ進展特性を定量的に把握する工学的立場として発展してきた方法が、いわゆる「破壊力学」である。

ひび割れを含む部材に力が作用した場合、その部材が線形弾性体であるならば、ほんのわずかな力が作用しただけでもひび割れ先端での応力は無限大となる。許容応力度設計の考え方に立つならば、無限大の応力が作用した場合にはすぐに壊れるはずであるが、実際にはすぐ壊れる事はなく、その材料及びひび割れの大きさや部材の形状に応じてある程度までの力に耐える事が経験的に知られている。

長さ２ａのひび割れを有する板に平均応力σ_0が作用した場合の全エネルギＵは、

$$U=U_0+U_a+U_r-W \qquad (3.1)$$

ここに、U_0は荷重を受けるひび割れなしの板の弾性エネルギ、U_aはひび割れによる弾性エネルギの変化、U_rは新たなひび割れ面の形成によって引き起こされた表面エネルギ、Ｗは外力による仕事で材端固定の場合はゼロとなる。ひび割れは進展するに伴いこのＵが増大する限り、平衡状態は存在し得るが、Ｕが減少する時にひび割れが急激に進展する。この不安定が起こる条件は、$U_a=\pi\sigma_0^2a^2/E$、$U_r=2(2a\gamma)$として次式で表わされる

$$\frac{d}{da}\left(U_0+\frac{\pi\sigma_0^2a^2}{E}+4a\gamma-W\right)=0 \qquad (3.2)$$

Ｅはヤング係数、γは単位面積当りの表面エネルギである。U_0は一定でＷ＝０であるから、

$$\sigma_0\sqrt{a}=(2E\gamma/\pi)^{1/2} \qquad (3.3)$$

（３．３）式の左辺は力学的パラメータと幾何学的パラメータの積であり、右辺は線形弾性体の材料特性を表わしている。問題は、この材料特性値をどの様にして定めるかである。

材料が線形弾性体の場合、ひび割れ先端近傍の応力は、図２のようにひび割れ先端に原点を置く二次元極座標を用いて、$r^{(n-2)/2}$（ｎ＝１，２，・・・）に関する級数で表わされ、ｒが充分に小さいひび割れ先端近傍領域を考える場合は次の様にその第１項で近似される。

$$\sigma_{ij}=\frac{K}{\sqrt{2\pi r}}f_{ij}(\theta) \qquad (3.4)$$

ここにｉ，ｊはデカルト座標を意味し、$f_{ij}(\theta)$は変形モード（図３）及び応力成分によって決まるθの関数である。Ｋは部材やひび割れ形状及び寸法に応じてひび割れ先端での応力が平均応力に対してどれだけ増大されるかを表わすパラメータで、応力拡大係数と呼ばれ、外力に比例する係数である。Ｋは一般に次式で表わされる。

$$K=\sigma\sqrt{\pi a g} \qquad (3.5)$$

ここに、σは公称応力、ｇは部材の形状・大きさ、ひび割れの形状及び負荷形式によって決まる数値である。一般的な変形モードは、３つの基本形の重ね合わせで表わされるので、各々の応力拡大係数K_I, K_{II}, K_{III}ひび割れ先端近傍の力学的状態を完全に表現する事ができる。

応力が増大してある限界値σ_cに達すると突然ひび割れが進展するが、その時の応力拡大係数K_cは破壊靭性（Fracture Toughness）と呼ばれる。

（３．５）式を（３．３）式と比較すると、非常に密接な関係が成り立っている事がわかる。中央部にひび割れを有する平板に無限遠で応力が作用する場合、ｇは１であるので、次式を得る。

$$K_c=\sqrt{2E\gamma} \qquad (3.6)$$

以上述べてきた様な、線形弾性理論に基づいてひび割れをもつ部材や構造物の挙動を扱う分野は線形破壊力学と呼ばれ、ひび割れ先端に降伏領域が形成されても、それが小規模の場合にはこの方法が適用可能である。

一方、ひび割れ先端に形成された塑性域の大きさが無視できない程度になる場合には、線形破壊力学は最早適用性を失い、それに代わるものとして非線形破壊力学が用いられる。非線形破壊力学のパラメータで最も代表的なものはＪ積分であり、次の様な物理的な意味を有している。即ち、内外力が釣り合っている状態でひび割れが進展している場合を考え、ひび割れ先端部を含む任意の領域が弾性体あるいは全ひずみ理論に従う弾性体でかつ除荷を伴わない場合には、その領域及びひび割れ表面で定義されるポテンシャルエネルギの単位面積当りの変化率（エネルギ解放

率）がＪ積分である。その限界値Ｊ。は小型試験片を用いて得られる。

また、大きな塑性変形が生ずる場合には、ひび割れ先端に変形が集中し、その塑性領域の拡大が破壊過程を支配する事から、ひび割れ開口変位ＣＯＤ（Crack Opening Displacement）が、その領域拡大あるいは変形集中の目安となるであろうとする立場もある。しかし、Ｊ積分あるいはＣＯＤを用いたとしても、不安定破壊が発生する以前に安定なひび割れが成長する場合には、この安定ひび割れの成長を破壊条件との関連でどのように捉えれば良いのかという問題が残されている。ところがこの問題こそが、次のコンクリートの破壊力学を論ずる際に最も重要かつ困難な問題であり、線形弾性体を前提とする線形破壊力学は勿論のこと、金属材料等に対して広く用いられている非線形破壊力学すらもそのままコンクリートに応用する事ができないのである。

４．コンクリートの破壊力学

コンクリートに対する破壊力学適用の初めての試みは、Neville（1959 年）とKaplan(1961 年)[6]によってなされた。その後約２０年間は、既往の線形破壊力学あるいは非線形破壊力学をそのままコンクリートに適用してＫ。あるいはＪ。を求める研究が数多くなされ、「破壊力学」がはたしてコンクリートに有効なのかあるいは適用できないのかという議論が長い間行われてきた。それまでの「破壊力学」が対象とした脆性材料や金属材料と比較して大きく異なる特徴点は、極めて複雑な非均質構造を有しているところにある。その結果、ひび割れの進展は骨材の介在によって伝播を阻止され分岐しながら、あるいは微細なひび割れの累積領域を伴いながら最初ゆっくりと起こり、ある限界を超えたところで急激に進む。従って、「ひび割れ先端の非線形領域は供試体寸法と比べて十分に小さい」という線形破壊力学の前提条件は満足されない。適用しょうとするとはりせい数ｍという巨大な供試体が必要となる。また、急激な伝播に先だって起こるゆっくりとした安定なひび割れの進展長さを明確に評価する事は不可能に近く、しかもひび割れ進展後もその応力レベルは低下するものの、骨材のかみ合によってある程度まで応力を伝達する範囲がある。この様に、歪がある限界を超えると、歪の増大と共に応力が減少する現象は「歪軟化」と呼ばれている。従って、Ｊ積分適用の物理的意味を失う。以上の様な問題点について、例えば文献〔7〕には、1981年までに、発表されたコンクリートのひび割れや破壊力学関係の文献抄録と研究の現状が整理紹介されている。　一方、此の様な難しい問題点を含んではいるが、コンクリートの破壊あるは非線形挙動の多くはひび割れの累積・進展によって引き起こされる事もこれまでの研究によって明らかにされている。従って、引張強度は圧縮強度に比して約1/10と小さい為にコンクリート構造物の設計に於いて直接考慮されてはいないもののひび割れ挙動の合理的な取扱いは極めて重要な課題である。それでは、どの様なパラメータを用いれば、コンクリートのひび割れ挙動をより合理的に表現できるのであろうか。またそのパラメータはどのような方法で評価されるのであろうか。

従来の「破壊力学」の適用を困難なものにしている事を解決する幾つかの試みの中でも重要なものは、Hillerborg等による「破壊エネルギ」G_F の提案である。[8),9)] この破壊エネルギは、供試体断面全体がひび割れ進展によって破断されるのに消費される全エネルギを、不安定なひび割れ伝播が起こらない様に完全に変位制御された試験によって評価し、破断面積全体で均等にそのエネルギが消費されたと考えて得られるMacro level のパラメータである。[10)]

このパラメータG_F を評価する為に切欠き梁の３点曲げ試験による方法が開発され[9)]、現在、その方法がＲＩＬＥＭ（材料及び構造物の試験・研究機関国際連合）Recommendationとして採用

されている。この方法では、安定した荷重－変位曲線を得やすくするために、梁せいの半分まで切欠きを入れ、しかもスパンが梁せいの８倍という長い梁を用いることが条件となっている。破壊エネルギは、梁自重の影響を考慮して次式で求められる。[9)、10)]

$$G_F = (W_0 + mg \cdot u_0) / A \qquad (4.1)$$

ここにW_0は荷重－変位曲線で囲まれた面積から求められた仕事量、ｍｇは供試体自重、u_0は最大変位である。但し、この方法には、梁の自重による仕事量が、変動し易いu_0の為に比較的ばらつきの多い点、あるいは供試体のボリュームに比して評価対象となる破面の大きさは極めて限定される点等の欠点もある。ＲＩＬＥＭの第８９技術委員会（委員長：S.P.Shahノースウエスタン大学教授）ではG_Fに代わる新しい破壊力学パラメータの導出も含めて新たな試験法の開発が検討されている。

数多くの実験的研究の結果、G_F値はコンクリートの調合、養生条件、材令、最大骨材粒径、供試体寸法、切欠き長さ比などの影響を受ける事がわかってきた。この実験結果を構造物解析に用いようとする際、評価パラメータの寸法依存性あるいは供試体形状と載荷方法の違いによる応力分布依存性が大きく、しかもそのメカニズムが不明な場合には問題となる。それで、この寸法依存性を切欠き梁の３点曲げで調べようとすると、巨大な梁の試験が必要となる事、自重や初期剛性の影響を一定の形で保持しながら破断面の大きさのみを変えていく事が困難である事等の為にＲＩＬＥＭ試験法の限界性に直面する。そこで筆者らは、自重の作用方向と加力方向とを直交させしかも初期剛性を一定に保ち得るＣＴ試験法を用いてG_F値の寸法依存性を検討した。[11)]その結果最大骨材粒径が１６㎜の場合、ほぼ一定のG_F値を得る為には破断面の大きさが少なくとも３００㎜は必要であるという結果を得た。最大骨材粒径が増すとこの寸法も増大する事になる。

一方、コンクリートの様な非均質材料であっても無限に大きい供試体であれば線形破壊力学が適用可能になるという前提に立ち、破断強度の寸法依存性を表わすSize Effect Law に基づいて大中小３つの、相似形供試体の破壊強度から外挿して線形破壊力学パラメータを求めるという方法がBazantにより提案されいる。[12)] しかしながら、この手法はあくまで現象論に基づいた経験則を基礎にしている為に、寸法依存性の発生機構を説明し得るものではない。また線形破壊力学に基づいているが為に、破断を引き起こすのに費やされた全エネルギの約７０％程度のエネルギで破壊するという推定結果を与えるなど過小評価となる傾向にある。[11)]

それに対して、Shah等は、安定なひび割れの発生に対して非線形破壊力学のパラメータK_Cをまた不安定なひび割れの進展開始に対して非線形破壊力学のパラメータＣＯＤを用い、此等双方のパラメータの関数を新しい破壊のクライテリオンとして提案している。[13)] しかしながら、これはK_CとＣＯＤという全く異なるディメンジョンを有するものを並列的にとり入れた経験則でしかない事、ＣＯＤの限界性はその定め方に依存しコンクリートの場合には材料特性値とは言い難いところから問題を含んでいる。

以上２つの他にコンクリートでも安定なK_C値を得る事ができるとする研究などもあるが[14)]その様にして得られたものが実際の構造物内で起こっているひび割れの発生・伝播の状態を表わし得るものなのか、また解析を合理的に行うのにこの様なパラメータで十分なのかというと疑問である。言いかえるならば、対象とする破壊力学パラメータが材料のどのレベルで、物理的破壊現象の中の何を説明しょうとするものなのか、またその情報が実際の設計など現実的な課題に対してどのように寄与し得るのかを考えてみる必要があろう。

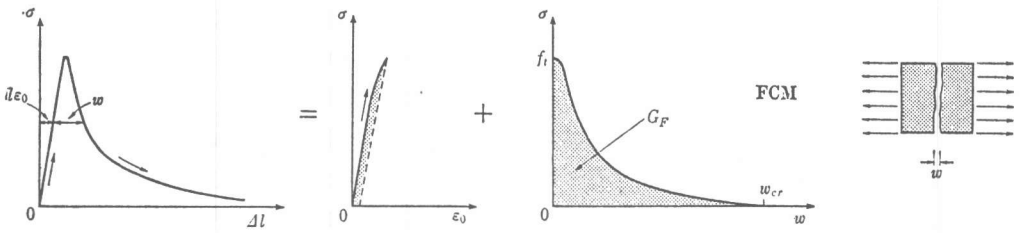
5．コンクリートの引張歪軟化則

引張り応力の作用を受けるコンクリートの非線形挙動を合理的に表す構成則の確立は、コンクリートの破壊力学の中心的課題の１つである。まず、コンクリートの引張変形挙動が安定な形で得られるものと仮定する。材料の非均質性の為に最初は至る所で微細ひび割れが発生するが、次第にその中の最も弱い領域に集中して微細ひび割れは累積し、遂にはそこから破断する。実際の非線形歪分布は複雑な形状を有していると思われるが、その非回復性の歪をすべて１本の仮想ひび割れ幅ｗの変化としてモデル化したものが仮想ひび割れモデル（ＦＣＭ）であり、一方ある幅w_cに均等に分布する形でモデル化したものがひび割れ帯モデル（ＣＢＭ）である。両モデル共、限られた非線形領域以外は弾性体と考えている。これらを応力と変形の関係で表わすと、図１の様になる。微細ひび割れ累積領域の応力－変形関係が、所謂引張歪軟化則であり、G_F あるいは g_f で示された面積が、前節の破壊エネルギに対応している。

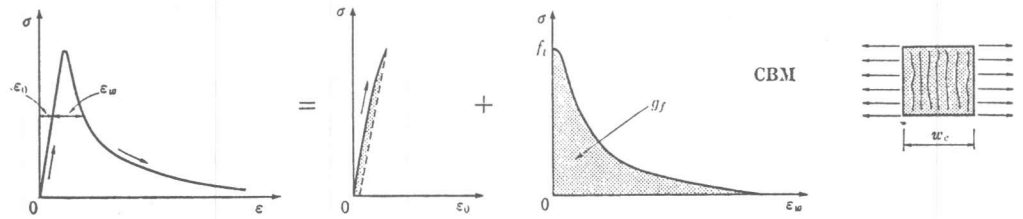
この様にして得られた歪軟化則を用いて、ひび割れ先端近傍の挙動を表わす事ができる。ここで、G_F は全く等しいが歪軟化則が異なる場合、得られた切欠き梁の３点曲げ試験の力と変形の関係は大きく異なる（図２）。[9]即ち、破壊力学パラメータG_F が求められても、材料あるいは構造物の非線形挙動を表わす材料特性の情報としてはこれだけでは不十分であり、歪軟化則をいかに求めるかがより重要なポイントとなる。[15]

極めて剛な載荷装置を用いた変位制御直接引張試験により安定した応力－変形曲線が得られている[9),16)]から、一般にこの様な関係を直接実験的に求める事は困難である。この歪軟化則の応力及び変形を各々引張強度及び最大開口変位で除して得られた関数は、コンクリートの配合や骨材の種類に関係なく２本の直線で大凡近似できる（図３）。[9]Alvaredo等は、引張強度f_t が同じであっても折点までの第１勾配が緩やかなほど曲げ破壊強度が大きくなる事、第２勾配はピーク以降の荷重－変形曲線の形状を決定する事を解析によって明らかにしている[7]。

一方、Wittmann等は、梁の曲げ変形曲線に最も良い近似曲線を与える歪軟化則を非線形最小二乗法によって求めるアルゴリズムを開発し、歪軟化則に及ぼす水セメント比、材令及び載荷速度



（ａ）仮想ひび割れモデル（ＦＣＭ）



（ｂ）ひび割れ帯モデル（ＣＢＭ）

図－１引張応力と変形の関係を表す２つのモデル化

の影響について考察している[18)、19)]

ところで、得られた歪軟化則が真に材料特性であるならば、異なる寸法であっても同一の結果が得られるはずであるが、G_F のみならずこの歪軟化則も変化する。[20)] 例えばf_t は寸法と共に若干の低下するのに対して、w_{cr}は急激な増大を示す。これは破断面に対して均等にエネルギが散逸していると仮定している為に起きるものであり、真の歪軟化構成則を考える為には破壊過程とプロセスゾーンの拡がり方を考えたモデルの構築が必要である。[21)]

一方、Liは、２つの切欠き長さの異なる供試体を用いプロセスゾーンの寸法依存性を内挿して得られたＪ－ＣＯＤ関係から歪軟化則を実験的に求める方法を提案している。[22)] どの方法がより合理的に良い結果を与えるのかは今後の研究によって明らかにされよう。

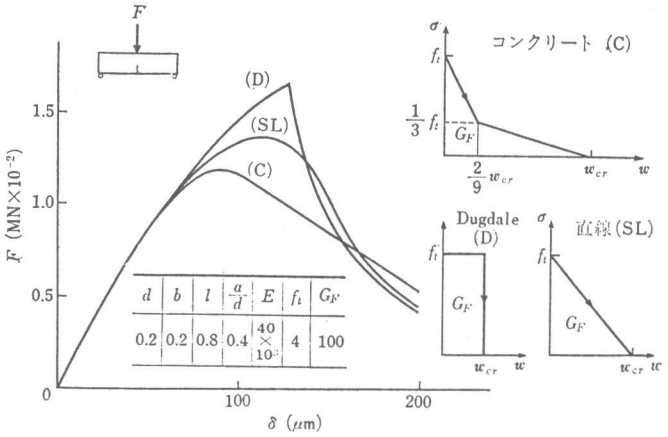
ＦＣＭは上述の様にコンクリートの非線形挙動を表わすのに極めて有効なモデルではあるが完全なモデルでは未だない。例えば、微細ひび割れが広い範囲にわたって分布する様な場合には不適である。またＩ型のみならずⅡ型やⅢ型も関係する場合には新たな展開が必要である。

６．コンクリート工学への破壊力学の応用

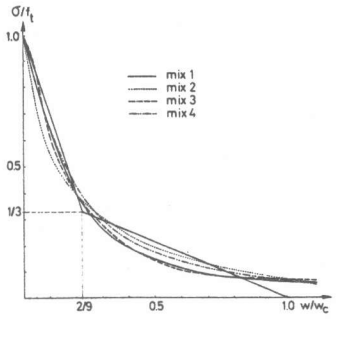
コンクリートは高度に非均質な複合構造を有し、その非線形挙動は大小様々なひび割れの発生・累積・伝播によって引き起こされる。従って、コンクリート工学に対して破壊力学という手法を応用しょうとする場合、どのレベルでどの様な現象を説明しょうとするかによってそのはたす役割は異なっている。例えば、コンクリート工学に於て破壊力学に限らず材料の力学的挙動の情報全般の流れを図４に例示する。ここに示す様にMeso levelからMacro level にわたって、破壊力学を用いてひび割れを含む非線形挙動が解析されている。

Roelfstra は、材料工学的立場から水分逸散過程で非均質材料内部及び表面に発生するひび割れが供試体全体の変形挙動に対して及ぼす影響について歪軟化則を用いて考察している。[23)] その結果、乾燥初期の段階で特に差異が大きく、乾燥収縮試験あるいは乾燥を伴うクリープ試験等の結果を考察する際にもこの点を考慮する事が重要であると指摘している。

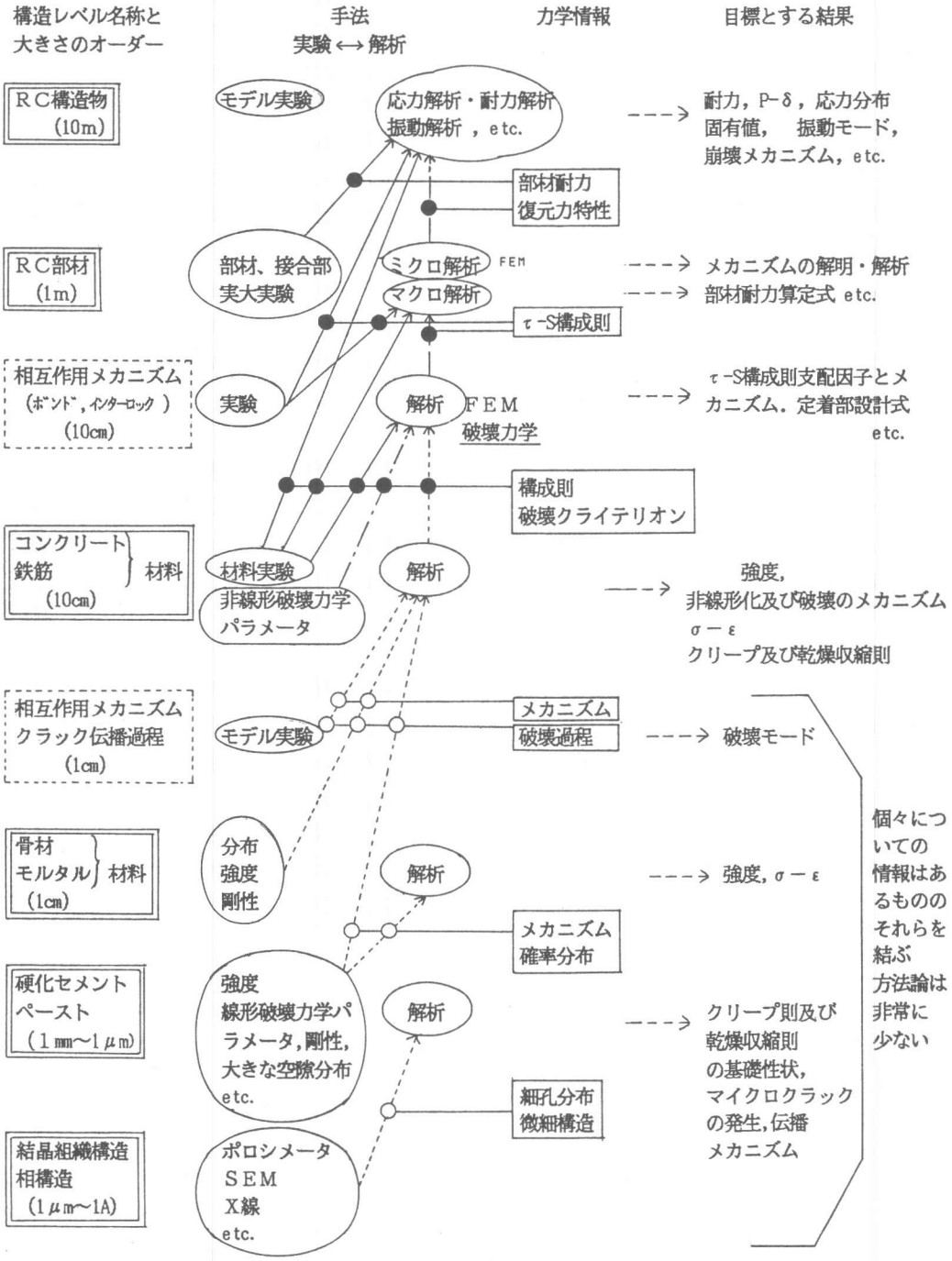
破壊力学をコンクリート工学にいかに応用できるかを示すレポートの出版がＲＩＬＥＭの第90技術委員会（90ＦＭＡ、委員長：L.Elfgren スエーデン・ルーロ工科大学教授）で検討されている。[24)] この中には熱応力や乾燥収縮応力の影響、脆性的なひび割れの発生・伝播を考慮した梁



図－２　荷重－変位曲線と歪軟化構成則との関係[9)]



図－３　無次元化歪軟化則[9)]



図－4　コンクリート工学の立場からみた
材料の力学的挙動の情報の流れの例

のせん断破壊挙動及び耐力評価、スラブのパンチング、鉄筋の付着挙動あるいは付着割裂、アンカーの引き抜き時の挙動、管の割れ、ダムのひび割れによる崩壊過程、プレキャスト版の接合部の割れ、せいの大きな梁のせん断破壊挙動などを解析した例が示されている。勿論現段階では歪軟化則の仮定などもバラバラなところがあり、得られた結果がすぐ設計に役立てられるという状況ではないが、今後の研究の方向に対して多くの示唆を与えるものと考える。

7．まとめ

コンクリートは高度に非均質な複合構造を有する為に、その力学的特性は種々の因子の影響を受け、複雑に変化する。従って、この非均質な内部構造をレベル分けする事によって各々のレベルの特性とそれらの相互関係にも着目する事の重要性を指摘した。

また、コンクリートの非線形現象の多くはひび割れの累積・進展に基づく場合が多いことから、ひび割れの力学とも言うべき破壊力学について、その概要を示し、コンクリートへの適用に際しての問題点及びコンクリート工学の発展に果たす役割などについて述べた。

8．参考文献

1）F.H.Wittmann（三橋　博三訳）:”コンクリートの内部構造と力学特性,”コンクリート工学Vol.24、NO.3、1983、pp.19-30.

2）F.H.Wittmann（六郷　恵哲訳）:”コンクリートに関する研究の趨勢,”コンクリート工学Vol.25、No.2、1987、pp.2-4.

3）日本コンクリート工学協会：”ＲＣ構造のせん断問題に対する解析的研究に関するコロキウム論文集,” 1982年 6月

4）岡村弘之：”線形破壊力学入門,”培風館、1975年

5）白鳥正樹，三好俊郎，松下久雄：”数値破壊力学,”実教出版、1980年

6）M.F.Kaplan:"Crack Propagation and the Fracture of Concrete," Journal of A.C.I., Vol58,1961,pp.591-610

7）F.H.Wittmann(Ed):"Fracture Mechanics of Concrete," Elsevier,1983

8）A.Hillerborg, M.Moder,and P.E.Petersson:Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements ,"Cement and Concrete Resarch,Vol.6,1976,pp.773-781.

9）P.E.Petersson:"Crack Growth and Development of Fracture Zone in Plain Concrete and Similar Materials ," Report TVBM-1006,D.V. of Building Materials, Lund Inst. of Tech.,Lund,Sweden,1981.

10）A.Hillerborg:"The Theoretical Basis of Method to Determine the Fracture Energy G_F of Concrete ," Materials and Structures, Vol.18,No.106,1985.7-8,pp.25-30.

11）H.Mihashi,F.H.Wittmann,Ph.Simonin and K.Rokugo:"Compact Teusion Test to Study Several Factors Influencing Fracture Energy of Concrete," Trans. of the Japan Cocrete Institute Vol.9,1987,pp.503-508.

12）Z.P.Bazant,P.C.Prat and P.A. Pfeiffer:"Mode Ⅰ Fracture Tests of Cncrete Using Different Specimen Geometries," Trans. of the 9th Int.Conf.on Structural Mechanics in Reactor Technology, Vol.H,1987,pp.35-40.

１３) Y.S.Jeng and S.P.Shah,"Two Parameter Fracture Model for Concrete," ASCE,EM, Vol. 111,No.10,1985,pp.1227-1241.

１４) 例えば、C.G.Go. and S.E.Swartz:"Energy Method for Fracture-Toughness Determination in Concrete," Experimental Mechnics, Vol.26,No.3,1986,pp.292-298.

１５) P.E.Roelfstra and F.H.Wittmann:"Numerical Method to Link Strain-Softening Failure of Concrete," Proc. of Int. Conf. on Fracture Mechanics of Concrete,Lausanne 1985.10,pp.127-139.

１６) H.A.W.Cornelissen,D.A.Hordijk and H.W.Reinhardt:"Experiments and Theory for the Application of Fracture Mechanics to Normal and Lightwight Concrete," Proc. of Int. Conf. on Fracture Mechanics of Concrete,Lausanne,1985.10,pp.419-429.

１７) A.M.Alvaredo and R.J.Torrent:"The Effect of the Shape of the Strain-Softening Diagram on the Bearing Capacity of Concrete Beams," Materials and Structures, Vol.20,No.116,1987,pp.103-110.

１８) F.H.Wittmann et al.:"Influence of Age of Loading, Water-Cement Ratio and Rate of Loading on Fracture Energy of Concrete," Materials and Structures, Vol.20,No.116 1987,pp.103-110.

１９) 三橋博三：”コンクリートの破壊力学の現状と展望，”コンクリート工学，Vol.25 No.2, 1987,pp.14-25.

２０) 木下泰徳：”破壊力学的手法に基づくコンクリートの軟化構成則に関する研究，”東北大学修士論文，1986年.

２１) N.Nomura,M.Izumi and H.Mihashi,"Method to Evaluate Transistion of Strain-Softening in Compact Tension Test of Concrete," Proc.of the Japan Concrete Institute, Vol.10,1988.

２２) V.C.Li,Ch-M.Chan and Ch.k.Y.Leung:"Experimental Determination of the Tension-Softening Relations for Cememtitious Composite," Cement and Concrete Research, Vol.17,1987,pp.441-452.

２３) P.E.Roelfstra:"Numerical Simulation of Time-Dependent Deformations under Hygral and Thermal Transient Conditions," Trans. of the 9th Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology, Vol.H,1987,pp.83-102.

２４) RILEM Technical Committee 90FMA:"Fracture Mechanics of Concrete Applications -Part A & B," Compiled at the Div. of Structural Engineering, Lulea Univ. of Technology,S-951,1987.