

論文

[2064] 有限要素法によるコンクリートのひずみ軟化解析

正会員 伊良波繁雄 (琉球大学工学部)

1. はじめに

引張破壊によるひずみ軟化を有限要素解析に取り入れる方法として、仮想ひびわれモデル^{1), 2)}がある。仮想ひびわれモデルでは構成則として、図-1に示すようなひびわれ面に垂直な応力 σ_n とひびわれ幅 w の関係で表している。引張破壊によるひずみ軟化を考慮して解析を行う時は、有限要素法を用いてひびわれ面で σ_n-w 関係を満たすようにひびわれ面に棒要素を用いる方法²⁾とひびわれ面の開口変位と結合力間の撓性方程式に基づく応力法³⁾がある。棒要素を用いる方法は要素境界に長さが0の要素を入れるために変位の自由度が増加し全体剛性マトリックスの大きさも増加する。このために、予めひびわれの発生が予想されるような要素境界のみに棒要素を配置する方法が行われている。撓性方程式を用いる方法も同様に、予めひび割れの発生が予測できる場合に有効である。しかし、任意の荷重や任意形状の鉄筋コンクリート構造物に応用する時にはひび割れの発生を予測するのは困難である。このために、本報告ではひび割れの発生が要素境界のみに限定されているけれども、どの要素境界でも容易にひび割れの導入が可能な解析手法について述べる。

二次元ハイブリッドストレスモデルを用いて、塑性条件式が要素境界に垂直な応力とせん断応力の関数の時の弾塑性剛性方程式を求める方法は前報^{4), 5)}に示してある。仮想ひび割れモデルを用いるときのひずみ軟化では、降伏曲面がひび割れ幅の増加に伴って縮小するので、塑性条件式の中に応力のみならずひび割れ幅も入ってくる。このために本報告では、この塑性条件式をハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理にラグランジェの未定乗数法で導入し、ひずみ軟化を考慮にいたした弾塑性剛性方程式を導いた。数値計算例としては、一次元の問題として棒要素を用いた引張破壊の問題を解析し、ひずみ軟化曲線の降下部の勾配の大きさ、弾性係数、要素の大きさによっては数値計算上不安定になることを示した。そして、これらの計算結果の考察からひずみ軟化の解析を安定して行うための方法を明かにした。この方法を二次元問題にも適用し、六郷⁶⁾らの行ったCT試験体の実験のシュミレーションを行ったところ、本報告で示している解析方法は良い精度を示すことが分かった。

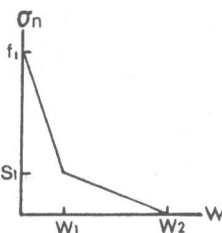


図-1 二直線モデル

2. 変分原理

ハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理において要素境

界積分を、図-2に示すように要素境界に設定された局所座標系 $n-s$ を用いて変換すれば

$$\left\{ \begin{aligned} -\Pi_{CH} = & \sum \left[\int \int \int \sigma_{ij} B(\sigma_{ij}) dx dy - \int \partial_n U (\sigma_n + V \tau_{ns}) ds \right. \\ & \left. + \int s \sigma_n (U \bar{\sigma}_n + V \bar{\tau}_{ns}) ds \right] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

のように表すことができる^{4), 5)}。式(1)で右辺の第1項はコンプリメンタリエネルギー関数の要素内積分、第2項は要素境界についての一週積分、第3項は外力の与えられた境界での積分、 σ_n と τ_{ns} はそれぞれ要素境界での垂直応力とせん断応力である。塑性条件式が応力のみ関数の時は、弾塑性剛性方程式を求めるための変分原理はつぎのようになる。

$$-\Pi_{CH} = -\Pi_{CH} + \int_{s_1} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_n} d\sigma_n + \frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}} d\tau_{ns} \right) \Gamma ds \quad (2)$$

ここで s_1 は破壊面での積分、 Γ はラグランジュの未定乗数である。式(2)での Γ の物理的な意味は s_1 上での停留条件式より求めることができる。 ΔW をひび割れ幅、 ΔZ をずれの大きさとすると、

$$\Delta W = \Gamma \frac{\partial f}{\partial \sigma_n} \quad \Delta Z = \Gamma \frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}} \quad (3)$$

となる。要素境界で破壊が生じたとき、硬化による応力の増加はひび割れ幅に比例するとし、塑性条件式をつぎのように仮定する。

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_n} (d\sigma_n - C_1 \Delta W) + \frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}} (d\tau_{ns} - C_2 \Delta Z) = 0 \quad (4)$$

ここで、 C_1 と C_2 はそれぞれ引張およびせん断に対する係数である。ひずみ軟化に対して C_1 と C_2 は負である。式(3)を式(4)に代入し、ラグランジュの未定乗数を用いて式(1)に導入すれば、弾塑性剛性方程式を求めるための変分原理が得られる。すなわち、

$$-\Pi_{CH} = -\Pi_{CH} + \int_{s_1} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_n} d\sigma_n + \frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}} d\tau_{ns} \right) \Gamma ds - \frac{1}{2} \int_{s_1} \left(C_1 \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_n} \right)^2 + C_2 \left(\frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}} \right)^2 \right) \Gamma^2 ds \quad (5)$$

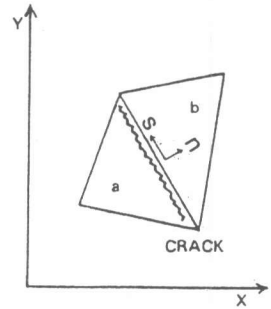


図-2 局所座標系

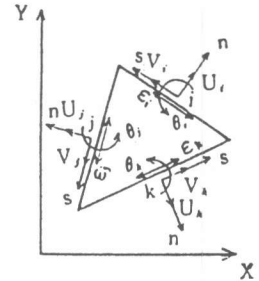


図-3 三角形平面要素

3. 弾塑性剛性方程式の誘導

3.1 三角形平面要素

弾塑性剛性方程式を導くためには応力場、変位場、ラグランジュの未定乗数を仮定する必要がある。ここでは、前報⁵⁾で示したように、応力場についてはパラメータが12個、変位場とラグランジュの未定乗数については式(6)、(7)のように線形の分布を仮定する。

$$U = u_i - \theta_i S, \quad V = v_i - \varepsilon_i S \quad (6)$$

$$\Gamma = \Gamma_{vi} - \Gamma_{\varepsilon i} S \quad (7)$$

応力場とひずみ応力関係式については、それぞれ次のように仮定する。

$$\{\sigma\} = [B] \{\beta\} \quad (8) \quad \{\varepsilon\} = [C] \{\sigma\} \quad (9)$$

式(8)と式(9)を用いれば式(1)の第1項の積分は次のようになる。

$$\int \int_{\Omega} u_n B(\sigma_{ij}) dx dy = \{\beta\}^t [H] \{\beta\} / 2 \quad (10)$$

ここで、 $[H] = \int \int_{\Omega} u_n [B]^t [C] [B] dx dy$ 、 $\{\beta\} = \{\beta_1, \dots, \beta_{12}\}^t$ である。式(1)の第2項の積分は全体座標系と局所座標系の応力の変換式及び式(6)を用いれば次のようになる。

$$\int \partial u_n (U \sigma_n + V \tau_{ns}) ds = \{\beta\}^t [G] \{u\} \quad (11)$$

式(1)の荷重項は $\{\bar{F}\}$ を荷重ベクトルとすればつぎのようになる。

$$\int s \sigma_n (U \bar{\sigma}_n + V \bar{\tau}_{ns}) ds = \{u\}^t \{\bar{F}\} \quad (12)$$

式(5)の右辺第2項については式(7)、(8)および応力の変換式を用いて

$$\int_{s_1} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_n} d\sigma_n + \frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}} d\tau_{ns} \right) \Gamma ds = \{\beta\}^t [G^*] \{\Gamma\} \quad (13)$$

となる。式(5)の右辺第3項はひずみ軟化に関係している項で、図-4に示すように要素境界のすべてにひびわれが発生している場合は次のようになる。

$$\frac{1}{2} \int_{s_1} (C_1 \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_n} \right)^2 + C_2 \left(\frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}} \right)^2) \Gamma^2 ds =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{L_{ij}/2}^{L_{ij}/2} (C_1 \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_n} \right)^2 + C_2 \left(\frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}} \right)^2) \Gamma^2 ds =$$

$$\{ \Gamma \}^t [G^{**}] \{ \Gamma \} / 2 \quad (14)$$

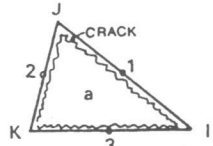


図-4 ひびわれが発生している要素

ここで $\{ \Gamma \}^t = (\Gamma_{v1} \Gamma_{\epsilon1} \Gamma_{v2} \Gamma_{\epsilon2} \Gamma_{v3} \Gamma_{\epsilon3})$ 、 L_{ij} は i 点と j 点間の距離である。式(5)に式(10)、(11)、(12)、(13)、(14)を代入し $\{ \beta \}$ 、 $\{ \Gamma \}$ 、 $\{ u \}$ についての停留条件より次式が得られる。

$$\{ \Gamma \} = [G^{**}]^{-1} [G^*]^t \{ \beta \} \quad (15)$$

$$\{ \beta \} = ([H] + [G^*] [G^{**}]^{-1} [G^*]^t)^{-1} [G] \{ u \} \quad (16)$$

$$[K_{eo}] \{ u \} = \{ F \} \quad (17)$$

$$[K_{eo}] = [G]^t ([H] + [G^*] [G^{**}]^{-1} [G^*]^t)^{-1} [G] \quad (18)$$

ここで $[K_{eo}]$ はひずみ軟化を考慮した弾塑性剛性行列である。

3.2 棒要素

図-5に示すような棒のひずみ軟化を考慮した弾塑性剛性行列、ひび割れ幅と変位の関係式を具体的に示す。棒の断面積を一定とし、軸力のみが作用すると仮定する。この時、降伏条件式は

$$f = \sigma_n - f_t \quad \text{である。ここで } f_t \text{ は引張強度である。} [B]、[C]、[H]、[G]、$$

$[G^*]、[G^{**}]$ を具体的に示せばそれぞれ次のようになる。

$$[B] = [1]、[C] = [1/E]、[H] = [AL/E]、$$

$$[G] = [-A \quad A]、[G^*] = [A]、[G^{**}] = [C_1 A]$$

これを式(15)、(16)、(17)、(18)に代入すれば次式が得られる。

$$\sigma_n = EC_1 / (C_1 L + E) \cdot (u_2 - u_1), \quad \Gamma = E / (C_1 L + E) \cdot (u_2 - u_1) \quad (19)$$

$$[K_{eo}] = \frac{C_1 EA}{E + C_1 L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

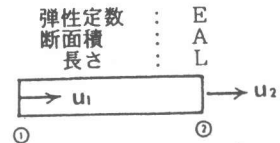


図-5 棒要素

4. 数値計算法

部材の耐力やひび割れの進展を知るためには、荷重増分法が用いられる。荷重増分法では各増分段階で、ひび割れの生じている要素境界では軟化則を満たすように解を求めなければならない。

このために、荷重増分法の一つである山田の方法を用いて軟化則を満たす方法をしめす。山田の方法では増分段階 i で引張強度 f_t に達した要素境界の応力を解放するために、次の増分

段階 $i+1$ ではその要素境界を有する要素の弾塑性剛性行列を用いて全体剛性行列をつくる。増分段階 $i+1$ で解放される応力の増分を $\Delta \sigma_n$ 、ひび割れ幅の増分を ΔW とすると、棒要素の場合は $dW = \partial f / \partial \sigma_n \cdot d\Gamma = d\Gamma$ であることに注意すれば、式(19)より $\Delta \sigma_n / \Delta \Gamma = \Delta \sigma_n / \Delta W = C_1$ となる。すなわち、 $\Delta \sigma_n$ 、 ΔW は図-7

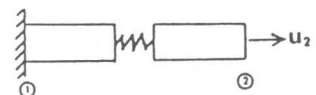


図-6 ひびわれが発生している要素

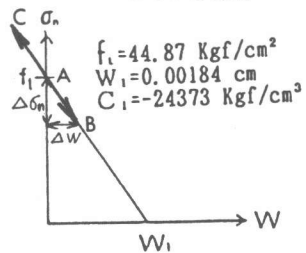


図-7 一直線モデル

において \vec{AB} または \vec{AC} で表されることが分かる。 \vec{AB} のときは軟化則を満たしているが \vec{AC} のときは軟化則を満たしていない。本報告では図-7の \vec{AC} で示されるように応力が引張強度よりも大きい場合を見かけの硬化が生じていると呼ぶ。

見かけの硬化を修正し、軟化則を満足させる方法とその物理的意味を説明する。『荷重増分法では、同一の増分段階において外力と内部応力は比例する。したがって、強制変位 $\Delta \bar{U}$ が作用したときにひび割れ面で $\Delta \sigma_n > 0$ 、 $\Delta W < 0$ （見かけの硬化が起こっている。すなわち図-7の \vec{AC} ）であれば、強制変位を逆に作用させたとき（ $-\Delta \bar{U}$ ）は $\Delta \sigma_n < 0$ 、 $\Delta W > 0$ となる（図-7の \vec{AB} ）。すなわち見かけの硬化が起こったときは強制変位を逆に作用させれば軟化則を満たすことがわかる』

5. 数値計算例

5.1 軸力を受ける棒のひずみ軟化解析

図-8は二本の棒が強制変位を受け、左側の棒がひずみ軟化を起こし、右側の棒のみで荷重を支える問題である。中央部の二つの要素（要素番号3と4）の剛性は非常に小さな値

($E=1.0\text{kgf/cm}^2$)を用いているので、この部分は無視できる。なお、材料の軟化特性は図-7に示すように一直線モデルである。解析に用いた材料特性 E 、 L 、 f_t は同じであるが軟化勾配は C_1 の0.90, 0.99, 1.00, 1.01, 1.10倍の5ケースについて三角形要素を用いて計算し結果を図-9に示した。軟化の勾配が C_1 の0.90と0.99倍の時は、引張破壊を生じた棒は完全に応力解放を行い、破壊の生じてない他の1本の棒のみで荷重を支えている。軟化勾配が C_1 のときは、引張破壊後に発散を起こし解を得ることができなかった（これは、棒要素の弾塑性剛性行列の分母が $E + C_1 L = 0$ となることから予想された結果である）。軟化勾配が C_1 の1.01と1.10倍の時は見かけの硬化（式19において $E + C_1 L < 0$ であるから $\Delta \sigma_n > 0$ となるので、これも予想された結果である）を示したが、前に述べたように、変位増分を逆向きに加えたところ、引張破壊を起こした棒は完全に応力を解放し、他の棒だけで荷重を負担していることが分かった。なお、図-9において、引張破壊後の荷重の低下は棒理論から得られる値と完全に一致する。

5.2 CT試験体のひずみ軟化解析

本報告で提案している解析手法を図-10に示すCT試験体のひずみ軟化解析に応用する。このようなCT試験体の実験および有限要素解析は野村・和泉³⁾、六郷ら⁶⁾によって行われており、本手法の精度の確認のためには良い例題である。六郷らの行った実験でのコンクリートは $W/C = 0.43$ 、圧縮強度は42.9MPaであり、ひずみ軟化則は図-1に示す二直線モデルである。CT試験体のリガメントの長さは15cm、30cm、60cmの3種類で、これらを各各Small, Medium, Largeの試

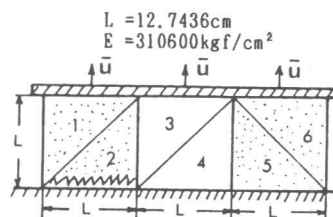


図-8 軸力を受ける二本の棒

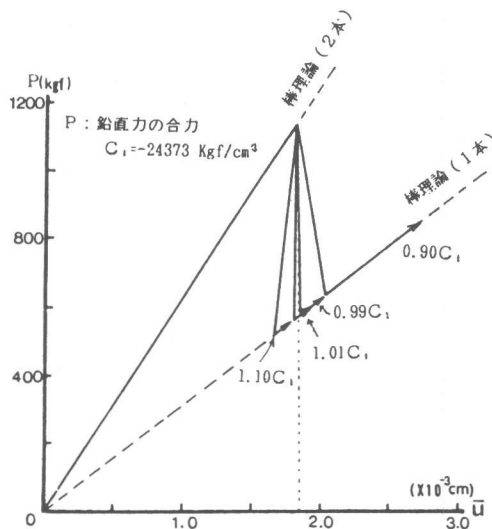


図-9 軸力と変位の関係

験体と称している。5.1では要素の大きさ、弾性係数、軟化曲線の勾配が解に大きな影響を与えることが分かったが、CT試験体の解析でも要素の大きさが解に影響を与えることは当然予想される。このために、図-11と図-12に示すようにリガメント上の要素分割を変えた解析を行った。リガメント上の応力は垂直引張応力 σ_n のみであるから、降伏条件式は $f = \sigma_n - f_t$ とする。

図-13には要素分割が粗い時の荷重Pと開口変位CODの関係を示した。要素分割はLarge、Medium、Smallの各試験体に対し同じ分割を用いているために、荷重段階ごとのひび割れ進展長さもそれぞれ5cm、2.5cm、1.2cmとなっている。このために、ひび割れ進展長さの長いLarge、Medium Smallの順に解の変動が激しくなっている。特にLarge供試体は3段階目以後の荷重増分でみかけの硬化が起こったために、荷重増分の方を逆に変えて計算を行った。ひびわれ面上でのひずみ軟化則を満足しているか否かのチェックを各荷重段階ごとでおこなったが、すべて、十分満足していることが分かった。なお、このような例題として、図-15にひび割れ面上の応力とひび割れ幅の関係を示した。図-14には要素分割が細かい時の荷重とCOD関係を示した。この時の荷重段階ごとのひび割れの進展長さはLargeで2.5cm、Mediumで1.25cm、Smallで0.625cmとなっている。図-14において、Large試験体で多少の変動がみられるが全体的に変動は小さく実験値に近い値となっている。Large試験体における変動は、ひび割れが生じた

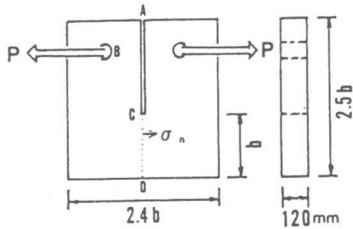


図-10 CT試験体

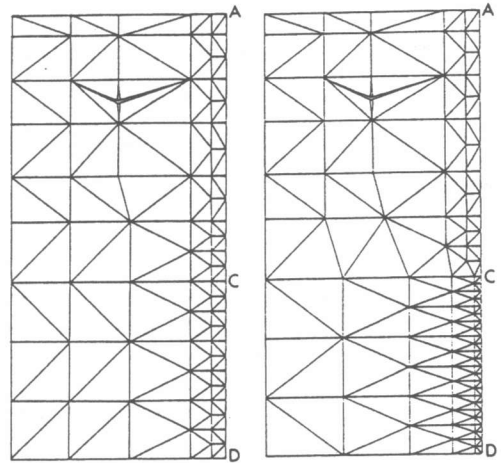


図-11 要素分割(粗) 図-12 要素分割(細)

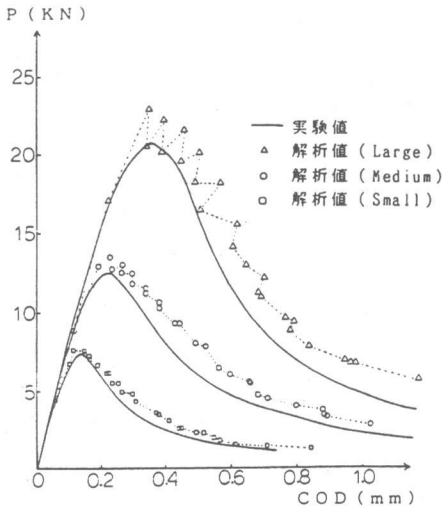


図-13 荷重・開口変位曲線(粗分割)

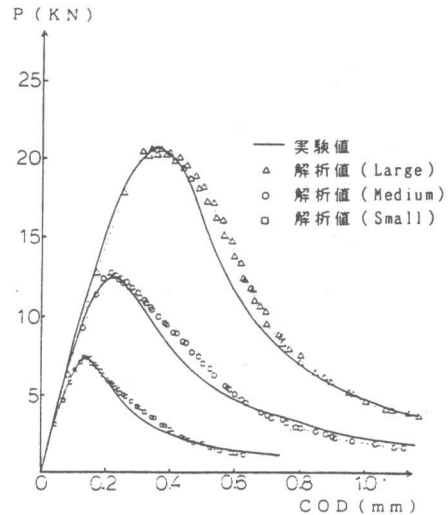


図-14 荷重・開口変位曲線(細分割)

境界の応力がひずみ軟化曲線の第一勾配に入ったときに荷重が減少し、第2勾配に入ったときに荷重の増加が起こっている。このような変動はCODが0.7953mmまで続き、それ以後はみかけの硬化を生じる点が発生したが、荷重増分を逆方向に変えることで解を求めた。図-16にはリガメント上の応力分布の変化を示した。これより、ひび割れ面上の応力分布の特徴はひび割れ発生後の急激な低下とそれに続くゆるやかな直線的に低下する部分からなることが分かる。このことはひずみ軟化曲線の第1勾配が急激な応力低下部に対応し、第2勾配がゆるやかな低下部に対応していることを示している。

6. まとめ

本報告では、仮想ひび割れモデルを仮定したときのひずみ軟化則を直接にハイブリッド型コンプレメンタリエネルギーの原理に導入する方法を示した。この方法から得られる弾塑性剛性方程式を用いれば、ひび割れを要素境界に発生させることが容易であり、棒要素を用いる方法のように新しい節点を必要としないので全体剛性マトリックスの大きさも増加することはない。

棒要素と三角形平面要素を用いて、棒のひずみ軟化解析を行った結果、要素の大きさ、弾性係数とひずみ軟化曲線の勾配によっては数値計算上不安定になる。不安定の内容は発散とみかけの硬化であるが、5.1で示したように発散は、ある一点だけで起こるの

で、発散は滅多に起こらないといえる。しかし、みかけの硬化は棒やCT試験体のひずみ軟化解析にみられるように、軟化曲線の勾配が大きい時、要素が大きいときはいつでも起こりうる。みかけの硬化が起こったときの計算手法は荷重増分を逆にする方向にすることである。このような方法でCT試験体のひずみ軟化解析を行ったところ、ひび割れ面での応力とひび割れ幅の関係はひずみ軟化則を満たすことを確認した。また、得られた荷重-開口変位曲線もほぼ実験値に一致する。

参考文献

- 1) P.E.Petersson: Crack Growth and Development of Fracture Zones in Plane Concrete and Similar Materials. Report TVBM-1006. Lund Univ. Sweden. 1984
- 2) 三橋博三: コンクリートの破壊力学の現状と展望, コンクリート工学, Vol. 25, No. 2, pp14-25, 1987. 2
- 3) 野村希晶・和泉正哲: コンクリートの引張軟化構成則の推定問題に関する基礎的検討, コンクリート工学年次論文報告集, 9-2, pp97-102, 1987
- 4) 伊良波繁雄: ハイブリッドストレスモデルによる鉄筋コンクリート構造物の非線形解析, 第7回コンクリート工学年次講演会論文, pp441-444, 1985
- 5) 伊良波繁雄: 修正された二次元ハイブリッドストレスモデルによる鉄筋コンクリート構造物の非線形解析, 第8回コンクリート工学年次講演会論文, pp541-543, 1986
- 6) Rokugo, F. H. Wittmann, P. E. Roelfstra, E. Brunwiler: Different Methods to Determine Fracture Energy and Strain Softening of Concrete, コンクリート工学年次論文報告集, 9-2, pp663-668, 1987

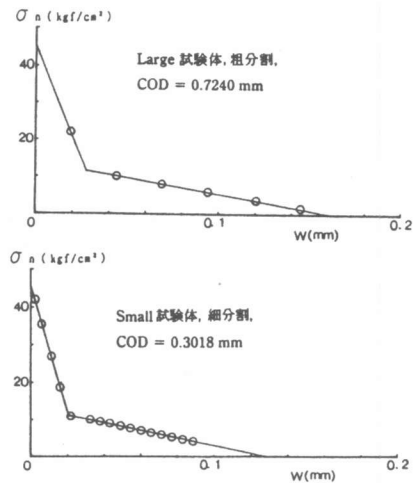


図-15 σ_n とひび割れ幅の関係

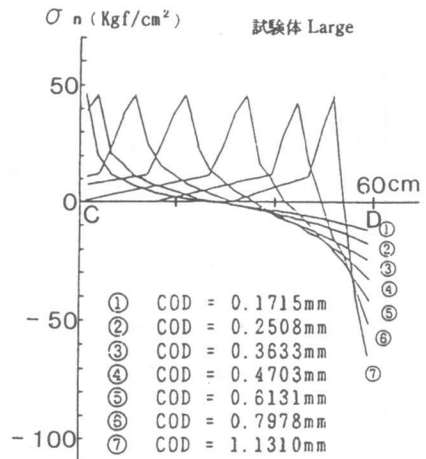


図-16 リガメント上の応力分布