

論文

[2127] ハイブリッドストレスモデルによるコンクリートの引張軟化解析

正会員 伊良波繁雄 (琉球大学工学部)

1. はじめに

コンクリートのひびわれを取り扱う方法として、離散ひびわれを仮定する方法と分布ひびわれを仮定する方法がある。離散ひびわれを仮定するときは引張軟化構成式として図-1に示すような二直線モデルがよく用いられる。筆者は既報<sup>1), 2)</sup>でハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理に引張軟化構成式をラグランジュの未定乗数法で導入し、その停留条件より弾塑性剛性方程式を導く方法を示した。

平面三角形要素の弾塑性剛性方程式は図-2に示すように、要素境界面に離散ひびわれを容易に発生させることができる。この要素を用いて、増分法としては山田の方法<sup>3)</sup>を用いる解析方法をCT試験体<sup>1)</sup>、直接引張試験体<sup>2)</sup>、内圧を受ける中空円筒の試験体<sup>4)</sup>の破壊のシミュレーションに適用した結果、良好な解を得ることができた。

筆者は棒要素の弾塑性剛性行列についても、既報<sup>1)</sup>で平面三角形要素と同様にハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理を用いて導いている。しかし、棒要素を用いたときの適用例が少ないために、解の精度や特性については十分に明らかにすることができなかった。このために、本報告では棒要素をCornelissen<sup>9)</sup>らの直接引張試験、Rots<sup>5)</sup>が行った平面要素による直接引張試験のシミュレーション、Runesson<sup>6)</sup>らや園田<sup>7)</sup>が行った引張軟化を示す部材で構成されるトラスの破壊のシミュレーションに適用し、解の精度や特性について検討した。

2. 理論

ハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理において、引張軟化構成式をラグランジュの未定乗数法で導入し、その停留条件より弾塑性剛性方程式を導く方法は三角形平面要素については文献[1]、[2]棒要素については文献[1]に示してあるが、ここでは、棒要素について簡単に説明する。図-3に示す棒要素の部材座標系での弾塑性剛性行列 $[k_{ep}]$ は次のように表すことができる<sup>1)</sup>。

$$[k_{ep}] = \frac{C_1 EA}{E + C_1 L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

ここで、Eはヤング係数、Aは棒の断面積、Lは棒の長さ、 $C_1$ は引張軟化曲線の勾配(負)である。棒の弾性剛性行列 $[k_e]$ はよく知られているように

$$[k_e] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

で表される。引張軟化が生じているとき、応力増分 $\Delta\sigma$ とひび割れ幅の増分 $\Delta W$ は、それぞれ次のように表される<sup>1)</sup>。

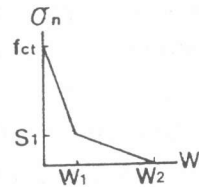


図-1 二直線モデル

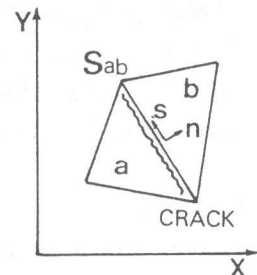


図-2 三角形要素

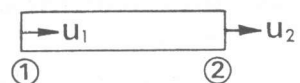


図-3 棒要素

$$\Delta \sigma = EC_1 / (C_1 L + E) \cdot (\Delta u_2 - \Delta u_1) \quad (3)$$

$$\Delta W = E / (C_1 L + E) \cdot (\Delta u_2 - \Delta u_1) \quad (4)$$

応力増分とひび割れ幅の増分の関係は式 (3) と式 (4) より

$$\Delta \sigma = C_1 \Delta W \quad (5)$$

となる。

これらの式はハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理を用いなくてもCarpinteri<sup>8)</sup>が示した式からも導くことができる。すなわち、棒に引張軟化が生じているとき棒全体の伸びを $\delta$

全ひび割れ幅 $W$ が図-4に示すように0から $W_c$ の間にあるとする。このとき、棒の伸びは、ひび割れの生じてない弾性体の部分の伸びとひび割れ部分の伸びの和であるから、次式<sup>8)</sup>のように表すことができる。

$$\delta = \sigma L / E + W_c (1 - \sigma / f_{ct}) \quad (6)$$

この式で $C_1 = -f_{ct} / W_c$ とおき、棒の伸びの増分 $\Delta \delta$ と応力の増分 $\Delta \sigma$ の関係を求めると

$$\Delta \sigma = EC_1 / (C_1 L + E) \cdot \Delta \delta \quad (7)$$

となる。式 (7) で、 $\Delta \delta = (\Delta u_2 - \Delta u_1)$ であるので、式 (3) と式 (7) は一致する。式 (7) の係数  $EC_1 / (C_1 L + E)$  に棒の断面積 $A$ をかければ式 (1) の右辺の係数が得られることが分かる。式 (1)、式 (2) の剛性行列は部材座標系で示してあるので、全体座標系で表すためには座標変換行列 $[T]$ を用いて、次式のように変換する必要がある。

$$[K_{\sigma\sigma}] = [T]^t [k_{\sigma\sigma}] [T] \quad (8)$$

引張軟化則として図-1のように応力とひび割れ幅ではなく、図-5に示すように応力とひずみの関係で表す場合がある。このために、両者を換算するための関係式を求める必要がある。本報告では、次のように求めた。図-3で節点1を固定し節点2に強制変位を与えたときの引張軟化時の応力増分は、引張軟化則が応力とひび割れ幅の関係で与えられるときは、式 (3) から次のように求められる。

$$\Delta \sigma = EC_1 / (C_1 L + E) \cdot \Delta u_2 \quad (9)$$

また、引張軟化則が応力とひずみの関係で与えられるときは次のようになる。

$$\Delta \sigma = \varepsilon (E \beta) = (E \beta / L) \cdot \Delta u_2 \quad (10)$$

この2式は等しいので、次式が得られる。

$$C_1 = \beta / (1 - \beta) \cdot (E / L) \quad (\text{ただし } \beta < 0) \quad (11)$$

### 3. 数値計算法

部材の耐力やひび割れの進展を知るためには、増分法が用いられる。増分法では各増分段階で、ひび割れの生じている要素では軟化則を満たすように解を求めなければならない。このために、増分法の一つである山田の方法<sup>3)</sup> (Rminとも云う) を用いて軟化則を満たす方法を示す。

step1 要素の破壊の状況に応じて $[K_{\sigma}]$ や $[K_{\sigma\sigma}]$ を要素毎に計算し全体剛性行列 $[K]$ をつくる。

step2 試験荷重を $\Delta L_{\sigma}$ とし、 $[K] \{ \Delta u_i \} = \{ \Delta L_{\sigma} \}$ を解く。

step3  $\Delta u_i$ を用いて要素の応力 $\Delta \sigma_i$ やひび割れ幅 $\Delta W_i$ を求める

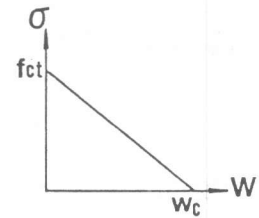


図-4 一直線モデル

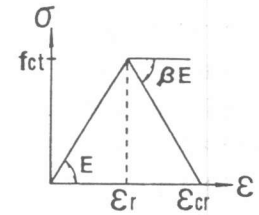


図-5 分布ひび割れの軟化曲線

step4 増分段階  $i-1$  で初めて引張強度に達した要素内のひび割れ幅が  $\Delta W_i > 0$  であるかを確認する。もし  $\Delta W_i < 0$  なら、試験荷重  $\Delta L_0$  を逆向きに作用させる。この時は、新たに剛性方程式を解く必要はない。すなわち、 $\Delta \sigma_i$ 、 $\Delta W_i$  の符号を逆にすればよい。（この操作が必要な理由は、図-6から分かるように、引張強度に達した要素境界のひび割れ幅が  $\Delta W_i > 0$  の時は引張軟化則を満たしているが (AB)、 $\Delta W_i < 0$  なら AC で示されるように引張軟化則を満たしていない。このために、引張軟化則を満たすためには試験荷重  $\Delta L_0$  を逆向きに作用させる)

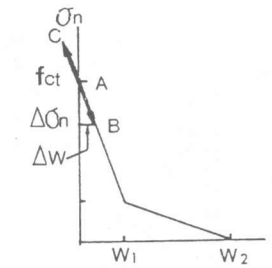


図-6 引張破壊直後の応力の経路

step5 応力増分  $\Delta \sigma_i$  は、その要素が破壊してなければ 図-7の  $P_1 Q_1$  で表される。要素が引張破壊の状態にあるなら応力増分は同図の  $P_2 Q_2$  や  $P_3 Q_3$  の鉛直成分で表される。そこで、応力増分を何倍すれば引張強度に達するか（例えば図-7で  $P_1 R_1 / P_1 Q_1$ ）、引張軟化を起こしている要素では応力増分を何倍すれば軟化の勾配が変わるか（例えば図-7で  $P_2 R_2 / P_2 Q_2$  や  $P_3 R_3 / P_3 Q_3$ ）を各要素について比を求める。そして、これらの内の最小の比を  $R_{min}$  とする。

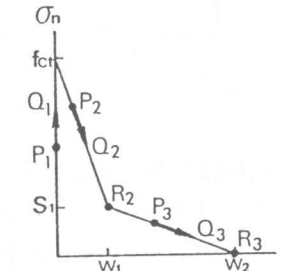


図-7 引張軟化での  $R_{min}$

step6 増分段階  $i$  での全応力、全変位、全ひび割れ幅はつぎのように求められる。

$$\sigma_{ni} = \sigma_{ni-1} + R_{min} \Delta \sigma_{ni}$$

$$u_i = u_{i-1} + R_{min} \Delta u_i, \quad W_i = W_{i-1} + R_{min} \Delta W_i$$

すなわち、ひび割れの進展を考慮した解析を行うためには、step1 ~ step6 をくりかえし計算すればよい。なお、上記の計算手順では除荷を考慮に入れてない。

#### 4. 数値計算例

4.1 両側切欠きを有する棒の直接引張試験  
Cornelissen<sup>9)</sup> らは両側切欠きを有する長方形断面の棒の引張力による静的および繰り返し荷重試験を行い、引張軟化構成則に関する研究を行った。ここでは、Cornelissenらの行った実験のシミュレーションをハイブリッドストレスモデルの平面三角形要素と棒要素を用いて行う。つぎに、Rots<sup>5)</sup> もこの問題をア

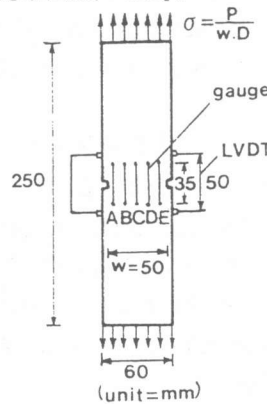


図-8 直接引張試験

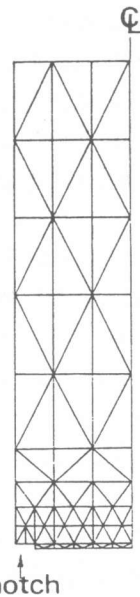


図-9 要素分割

イソパラメトリック要素を用いて解析しているので（材料特性はCornelissenらの行った実験値とは異なる値を用いている）、本解析法による解とRotsの解との比較検討を行う。

Cornelissenらの試験体は図-8に示すように、断面は幅が60mm、厚さが50mm、長さは250mmの長方形断面の棒である。棒の中央には幅5mm、深さ5mmの切欠きが両側についている。コンクリートのヤング係数は  $E = 39270 \text{ N/mm}^2$ 、ポアソン比は  $\nu = 0.2$ 、引張強度は  $f_{ct} = 3.2 \text{ N/mm}^2$ 、破壊エネルギーは  $G_f = 103.1 \text{ J/m}^2$  である。本報告では引張軟化曲線として、六郷<sup>10)</sup>

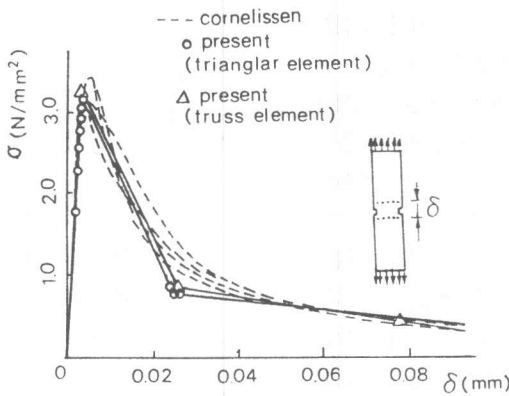


図-10 平均応力とエクステンソメータの伸びの関係

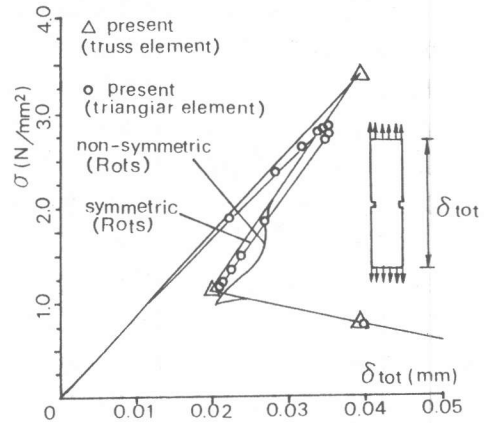


図-11 平均応力と棒全体の伸びの関係

らが提案した二直線モデル ( $f_{ot}/4$ の所に折れ曲がりがある) を用いている。図-8のAからEはエクステンソメータで、その長さは35mmである。解析は対称性を考慮して行った。平面三角形要素を用いるときは、対称性を考慮して、図-9に示すように1/4のみ要素分割を行い解析に用いた。境界条件は図-9において、下端(切欠きの中央)の鉛直方向の変位と右端(棒の中心線)の水平変位を拘束し、上端からは変位制御で引張力を加えている。棒要素を用いて解析するとき、図-9において切欠き部とそれ以外の部分の2要素に分割した。図-10には、平均応力 $\sigma$ (軸力を切欠き位置での棒の断面積で割る)とエクステンソメータの伸び $\delta$ の関係を示した。本報告で示した解析法による解は平面三角形要素の場合は丸印、棒要素の場合は三角印で示してある。平面三角形要素による解はCornelissenらの行った実験値と比べると、 $\delta = 0.02\text{mm}$ 付近で実験値よりも低くなっているがそのほかの部分では実験値と大体一致する。棒要素による解は平面三角形要素による解と最大荷重および最大荷重後の荷重低下領域においても大体一致する。

Rots はアイソパラメトリック要素を用い、ひび割れは分布ひび割れを仮定し増分法は snap-back が生じても解を得ることのできる arc-length法を用いて直接引張試験体の引張試験のシミュレーションを行っている。Rotsが用いた試験体は断面寸法はCornelissenらの試験体と同じであるが、Rotsはコンクリートの材料特性を $E = 18000\text{N/mm}^2$ 、 $\nu = 0.2$ 、 $f_{ot} = 3.4\text{N/mm}^2$ 、 $G_f = 59.3\text{J/m}^2$ とし、引張軟化則は $f_{ot}/3$ の所に折れ曲がりがある二直線モデルを仮定している。ここでは、Rotsの解析結果と比較するために、ハイブリッドストレスモデルの平面三角形要素と棒要素を用いて解析を行った。なお、境界条件と要素分割は前に示した解析例と同じである。図-11には平均応力 $\sigma$ と棒全体の伸び $\delta_{tot}$ の関係を示した。本報告で示した解析法による結果は平面三角形要素の場合はRotsの解(対称な場合)と一致する。棒要素による解は平面三角形要素による解よりも最大荷重は高目になっているが、最大荷重後は snap-back の部分を含め、平面三角形要素の解と大体一致する。

#### 4.2 トラス構造の解析(2部材の場合)

Runessonら<sup>6)</sup>はポテンシャルエネルギーの原理を用いて、増分法の各増分段階で繰り返し計算で解を求める方法で引張軟化を示す材料の解析例を示している。ここでは、Runessonらが示し

た2部材で構成されたトラスの引張軟化解析を棒要素を用いて解析し比較してみる。

解析対象は図-12に示すようなトラス構造である。境界条件は節点AとDの鉛直変位と水平変位が拘束されており、節点Cの鉛直方向には強制変位 $\bar{V}_2$ が作用している。引張軟化則は図-5に示すように、軟化域の応力とひずみの関係が一直線モデルで与えられており、 $\beta = -0.233$ 、引張破壊が生じる時のひずみは $\epsilon_V$ である。このために、式(11)を用いて $C_1$ を求めた。なお、引張軟化の生じる場所は図-12のAB部分のみである。棒要素で解析するときは、同図に示すようにACとCDの2要素で解析した。

解析結果は、鉛直変位 $\bar{V}_2$ と水平変位 $U_2$ の関係で図-13に示す。Runessonらの解と比較すると、部材AB部分が引張強度に達するa点は一致しているが、b点は筆者の解が $\bar{V}_2 = U_2 = 3.742 \epsilon_V L$ に対しRunessonらは、それよりも、少し大きい値となっている。図-13の線bcは部材ACが破壊したあとの剛体変位を意味しているので、 $\bar{V}_2 = U_2$ となる必要があるが、筆者の解はこの条件を満たしている。

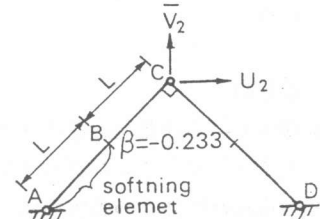


図-12 トラスの引張軟化解析

#### 4.3 トラス構造の解析 (5部材の場合)

図-14に示すトラスの引張軟化解析の例を示す。この解析例は園田<sup>7)</sup>が全ポテンシャルエネルギー増分関数の最小化問題を非線形計画法の手法を用いて解析している。引張軟化則は図-5に示すように応力とひずみの関係で表されており、 $\beta$ は $-1.0, -2.0, -5.0$ の3ケースである。 $f_{ot} = 1.0$ 、引張破壊が生じる時のひずみは $\epsilon_V = 1.0$ 、 $E = 1$ 、断面積 $A = 1$ 、境界条件は図-14に示すように、節点1と節点4の鉛直変位と水平変位は拘束されており、節点3には強制変位 $\bar{U}_3$ が加えられている。解析結果は節点3に作用する反力 $P$ と変位 $\bar{U}_3$ の関係で、図-15に示した。図-15の(a)は $\beta = -1.0$ の結果を示してあるが、実線はハイブリッドストレスモデルの棒要素による解、丸印は園田による解である。同図においてA点は部材④が引張強度に達したときの荷重、線

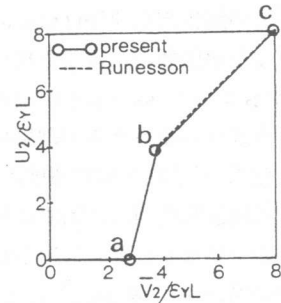


図-13  $\bar{V}_2 - U_2$ の曲線

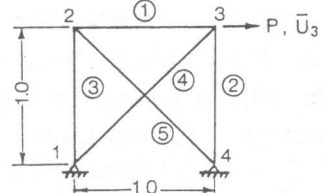


図-14 トラスの引張軟化解析

ABは部材④の引張軟化の状態を示している。B点は部材④の応力がすべて解放された状態を示す。B点までは園田による解と筆者の解とほぼ一致している。しかし、増分の回数が両者の解析方法で大きな差がある。筆者の解析方法は $R_{min}$ 法を用いているためわずか2回の増分でB点が求められるのに対し、園田の解析方法では10回以上の増分を必要としている。線BDは部材④を取り除いたトラスの弾性挙動を意味し、D点は部材①と部材③が同時に引張強度に達する時の荷重である。

図-15の(b)には $\beta = -2.0$ の解析結果を示してあるが $\beta = -1.0$ とほぼ同じ結果なので説明は省略する。

図-15の(c)には $\beta = -5.0$ の解析結果を示してあるが、破壊順序は $\beta = -1.0$ と同じなので反力 $P$ と変位 $\bar{U}_3$ の関係は大体同じである。 $\beta = -5.0$ が $\beta = -1.0$ と異なるところはA点からB点に移るところである。すなわち、園田の解はA点からB'点まで荷重は急激に低下する

が、線A B' 上では引張破壊を起こしている部材④は引張軟化則を満たしてない。これに対して、筆者の解は引張軟化が生じる時には、つねに引張軟化則を満すように解を求めているために(数値計算の step4 で示したように、軟化則を満たすために  $\Delta W$  の正負のチェックを行い変位増分の向きを決めている。)、線A Bのようにsnap-backが生じている。

### 5. まとめ

本報告で得られた結論を述べると次のようになる。

- 1) ハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理から得られた棒要素の弾塑性剛性方程式と増分法として山田の方法を用いる解析方法を既報<sup>1)</sup>で示した。本報告ではこの解析方法をCornelissenらの直接引張試験、Rotsが行った平面要素による直接引張試験体の破壊のシミュレーション、Runessonらや園田が行った引張軟化を示す部材で構成されるトラスの破壊のシミュレーションに適用した結果、得られた解の精度は良好であることが分かった。
- 2) 数値計算例 4.1の両側切欠きを有する棒の直接引張試験のシミュレーションで示したように平面要素を用いた解の場合は、増分法としてarc-length法を用いた Rotsの解と山田の方法を用いた解は一致する。棒要素を用いた解析では最大荷重は高目となったが、snap-backを含め、荷重低下域の解を精度よく求めることができる。

謝辞 本報告をまとめるのに、ご助力をいただいた本学科4年次の喜屋武聖君に謝意を表します。

参考文献 [1] 伊良波繁雄:有限要素法によるコンクリートのひずみ軟化解析,第11回コンクリート工学年次講演会論文,pp387-392,1989 [2] 伊良波繁雄:ハイブリッドストレスモデルによるひずみ軟化解析法, JCIコロキウム コンクリート構造の破壊力学に関する研究,1990.3 [3] 山田嘉昭:塑性・粘弾性,培風館,1972年 [4] 伊良波繁雄:内圧を受けるコンクリートの中空円筒の破壊, JCIコロキウム コンクリート構造の破壊力学に関する研究,1990.3 [5] Rots.J.G:Computational Modeling of Concrete Fracture, Dissertation,Delft Univ of Techn,1988 [6] Runesson.K,Larsson.R,Sture.S: Characteristics and Computational Procedure in Softening Plasticity,J.Engng.Mech, ASCE,VOL115,NO8,pp1628-1646,1989 [7] 園田恵一郎:ひずみ軟化構造の非線形解析に対する最小エネルギー探索法,土木学会第35回年次講演概要集 第1部, pp73-74,1980 [8] Carpinteri.A:Decrease of Apparent Tensile and Bending Strength with Specimen size: Two Different Explanations based on Fracture Mechanics, Int.J.Solids Structures,VOL25,NO4,1989 [9] Cornelissen.H.A.W,Hordijk.D.A,Reinhardt.H.W: Experiments and Theory for the Application of Fracture Mechanics to Normal and Lightweight Concrete, Fracture Toughness and Fracture Energy of Concrete, edited by F.H.Wittmann,Elsevier, pp565-575,1986 [10] Rokugou.k,Iwasa.M,Suzuki.T Koyanagi.W: Testing Methods to Determine Tensile Softning Curve and Fracture Energy of Concrete,International Workshop on"Fracture Toughness and Fracture Energy Test Methods for Concrete and Rock",pp128-135,oct,1988,sendai

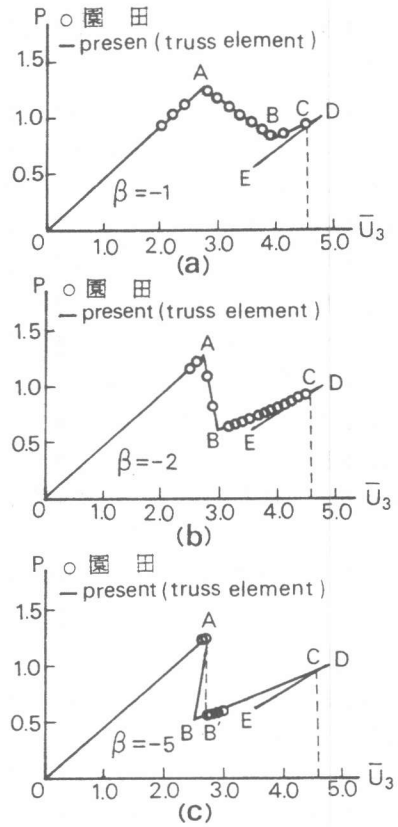


図-15 反力Pと変位 $\bar{U}_3$ の関係