

## [委員会報告]

## コンクリートの破壊力学研究委員会報告

コンクリートの破壊力学研究委員会

委員長 三橋 博三(東北大学工学部)

## 1. 委員会設立の背景と活動の概要

コンクリートの引張強度は、圧縮強度に比較してはるかに小さい為に、通常の鉄筋コンクリート構造物の設計では無視され、主として鉄筋コンクリート構造物の耐久性の面からのみコンクリートのひびわれが重視されてきた。しかし、近年の構造解析技術の進歩や終局状態での構造物の安全性評価の必要性が高まってきた中で、ひびわれに基因するコンクリートの非線形挙動の把握が重要な課題となってきた。

例えば有限要素法に代表される解析手法の発達が目覚しく、従来は取り入れる事がほとんど不可能であったコンクリートのひびわれや鉄筋とコンクリート間の力の伝達機構など、非線形挙動を生起する種々の要因を組み込んだコンクリート構造物の解析も可能となってきている。ただし、この解析手法の発達に見合った材料挙動のモデル化の開発あるいはそれに見合った材料特性評価試験法の開発がなされなければ、この近代的な数値解析法の持っている威力を十分に発揮させる事はできない。また寸法効果も重要な問題となる。しかしながら、コンクリート構造の力学的挙動に及ぼす影響因子が複雑で多岐にわたる事もあって、とりわけコンクリートのひびわれ特性に関しては、必ずしも上記の目的に有効でかつ合理的なモデルあるいは特性評価法が確立されたとは言えないのが現状である。

コンクリートの非線形挙動の多くは、微細なひびわれの発生・累積・連結・成長に基因するが、とりわけ引張り、曲げ、せん断等が作用する場合には、急速なひびわれの伝播によって部材の破壊が生じ、平均的な応力の評価に基づく従来の破壊基準では合理的な解析ができず、ガラスや金属材料の破壊強度推定法として発展してきた破壊力学の手法をコンクリートに応用することの可能性が世界的に注目されている[1-4]。

このように急速に発展しつつある研究の情報を収集・整理して我が国の研究者及び技術者に伝えると共に、新たな試験法の開発やコンクリート工学への破壊力学の応用の検討などを組織的に行なう事を目的として、1988年5月にコンクリートの破壊力学研究委員会が日本コンクリート工学協会内に設けられ、1990年3月末をもって終了した。この委員会の構成は以下の通りである。

委員長 三橋 博三

幹事 野口 博、六郷 恵哲

委員 井上 範夫、江口 清、大内 一、大岸 佐吉、大津 政康、大東 隆、  
橘高 義典、小林 信一、塩屋 俊幸、白井 伸明、白石 一郎、谷口 元、  
寺村 敏史、根井 浩、藤井 栄、堀井 秀之('89.4~'90.3海外通信委員)  
前川 宏一、三瓶 昭彦、吉川 弘道、

通信委員 内田 裕市('89.4~'90.3)、野村 希晶('89.4~'90.3)、平居 孝之、  
宮本 文穂、村上 聖

海外通信委員 遠藤 孝夫、長谷川俊昭

コンクリートの破壊力学研究委員会では、2年間にわたるその委員会活動の成果をまとめ、主としてひびわれ特性の評価やモデル化について述べた基礎編と部材解析や設計あるいは材料性能の評価に破壊力学をいかに用い得るかを示した応用編から構成された委員会報告書を取りまとめた。更に、2年間の活動の総まとめとして1990年3月末にコロキウムを開催し、広く会員からの論文を募り、委員会報告と研究発表を交えた意見交換の場を設けた。また、大韓民国から、国際的に活躍している二人の研究者を招き、最近の成果を発表して頂いた。コロキウムでは5つのセッションで13編の論文発表と7つの委員会報告がなされ、約200名の参加者があった。尚、上述の委員会報告書はコロキウム論文集と合わせて一冊にまとめられている[5]。以下に、当委員会ですべての委員会報告書の概要を紹介するが、詳細は文献[5]を参照されたい。

## 2. コンクリートの破壊力学と破壊力学パラメータ

コンクリートに発生するひびわれの原因は、非常に多数の因子が複雑に絡み合っている為に、合理的に分類するのは容易ではないが、その原因がいずれの場合であっても、何等かの原因でコンクリートに局所的なあるいは部材全体にわたる引張応力が作用し、その応力に対して材料が抵抗し切れない為にひびわれが発生する事に帰着する。即ち、ひびわれ発生には応力条件が基準となる。

しかしながら、コンクリートに於いては、ひびわれの発生が直ちに強度破壊に結びつくものではなく、局所的に大きな引張応力が作用しても破壊に至らない場合がある。即ち、そのひびわれが伝播する条件も合わせて考慮してはじめてひびわれ抵抗性能を評価する事ができる。このひびわれ伝播の条件は、もはや応力のみによっては判定できず、ひびわれ伝播に伴って消費されるエネルギーに着目しなければならない。

破壊力学とは、ひびわれの発生、成長によって引き起される現象、即ち破壊現象を対象とした力学である。ひびわれ先端に於ける応力やひずみの特異性を考慮し、破壊現象を支配している破壊力学パラメータを見出し、対応する破壊基準を用いて破壊現象を記述する事が破壊力学の目標である。

破壊力学の考え方は、1921年に発表されたGriffith理論にその源を辿る事ができる。その後線形破壊力学として発展し、脆性破壊や疲労破壊に対する安全性を確保する為に、金属構造物の設計や維持管理等の過程で破壊力学的手法が用いられている。

ひびわれの生じていない弾性領域と完全なひびわれ部分との中間にある破壊進行領域(fracture process zone)では、引張ひずみ(あるいは、その領域におけるひびわれ幅の総和)の増大に伴って、伝達される引張応力が減少するいわゆる引張軟化現象が生じる。この破壊進行領域の長さは、コンクリートの種別や載荷条件にもよるが、数cmから数十cm以上にもなる。したがって、ひびわれ先端に形成される非線形領域が部材寸法に比べ十分に小さいことを前提とした線形破壊力学は、一般のコンクリート構造物に対してはそのままでは適用できない。

そこで、コンクリートのひびわれ抵抗性能を表わす破壊力学パラメータとして注目を浴びるようになってきたものが、引張応力下のコンクリートの破壊エネルギー(単位投影面積のひびわれの形成に必要なエネルギーであり、引張軟化曲線下の面積)と引張軟化曲線(ひびわれの成長に伴って減少する引張伝達応力と引張ひずみまたはひびわれ幅との関係)で代表される引張軟化特性である。また、コンクリートの破壊の脆性度や部材破壊の脆性度を表す指標として、破壊エネルギー $G_F$ と、引張強度 $f_t$ 、弾性係数 $E$ を組み合わせた特性長さ $l_{0n}$ や、部材寸法 $L$ と特性長さ

$l_{ch}$  との比で表される脆さ数  $B$  がしばしば用いられる。

$$l_{ch} = E G_F / f_t^2 \quad ; \quad B = L / l_{ch} = L f_t^2 / (E G_F) \quad (2.1)$$

特性長さは、脆性な破壊を生じる材料ほど小さくなり、通常のコンクリートでは、20~40cm程度と言われている。

最近では、これらの材料特性値を評価し、あるいはこれらを数値解析や理論に組み込み、ひびわれの進展によるコンクリートの破壊現象について検討しようとする研究が盛んに行われるようになってきた。しかしながら、破壊進行領域の中で何が起っているのかは未だ必ずしも明らかにされてはいない。

破壊エネルギー  $G_F$  や引張軟化曲線の形状に影響を及ぼす各種要因としては、配合 (W/C、材令、骨材の種類・最大粒径、養生条件、繊維等)、環境 (温度、含有湿度等)、予載荷 (圧縮・引張、繰返し数等) などが挙げられる [6]。また、載荷速度やリガメント (破面長さ) が大きくなるに従って、破壊エネルギーは増大する事が知られている [7]。

### 3. 破壊力学パラメータの評価法

切り欠き梁の3点曲げ載荷試験によって破壊エネルギー  $G_F$  を評価する試験法がRILEMから推奨されている。その要点を(3.1)式及び図3.1と図3.2に示す。

$$G_F = (W_0 + m g \delta_0) / A_{110} \quad [N/m (J/m^2)] \quad (3.1)$$

ここに、 $W_0$  は図3.2に示す荷重-変位曲線下の面積 (N/m) ;  $m = m_1 + 2 m_2$  (kg) ;  $m_1$  は支点間の梁の重さであり、梁の重さに  $l/L$  (載荷スパンと供試体長さとの比) をかけて計算する ;  $m_2$  は試験機に取り付けられておらず、破断まで供試体に載っている載荷用の鋼球等の治具の重さ ;  $g$  は重力加速度  $9.81 (m/s^2)$  ;  $\delta_0$  は梁の破断時の変位 (m) ;  $A_{110}$  は梁の破断部分の面積であり、梁軸に垂直な平面に投影した破壊域の面積 ( $m^2$ ) である。また、供試体寸法は骨材の最大粒径に応じて定める事としている。

委員会報告書には、このRILEM推奨試験法の日本語訳全文を掲載すると共に、それを実施する上での注意点などについて述べている。更に、破壊エネルギー  $G_F$  を求めるその他の方法として、コンパクトテンション (CT) 試験やくさび挿入試験など、新しい試験方法についても提示した。

一方、引張軟化曲線を評価する方法としては、これまでのところ大きく分けると以下の4つが報告されている。即ち、(1) 直接引張試験による方法 ; (2) 実験と数値解析を併用する方法 ; (3) J積分に基づく方法 ; (4) マルティカッティングによる方法の4つである。委員会報告

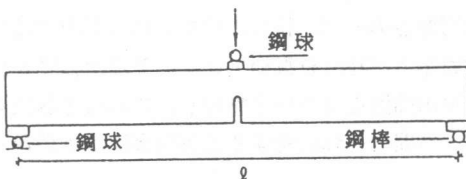


図3.1 RILEMの3点曲げ載荷試験

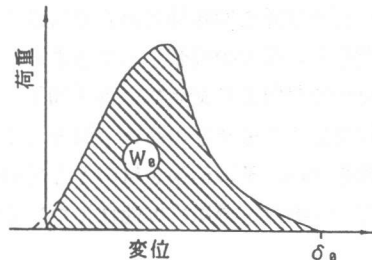


図3.2 はりの荷重-変位曲線下の面積  $W_0$  とはりの破断時の変位  $\delta_0$

では、これら4つの方法について比較的詳しく解説を加えている。しかし、各々に問題点もある。第1の方法は、剛性の極めて高い試験機と優れた制御装置等が備って始めて可能となるもので、容易で安定した評価法とは必ずしも言えない。載荷装置がより簡単なものとして、円筒引張試験法等もある。第2の方法は、引張軟化曲線の形を仮定して数値解析を行い、実験結果と解析結果の差が最小となるようにその引張軟化曲線を規定するパラメータを求めるものである。従って、引張軟化曲線の形状が不明な場合には適用できない事、特性形状が複雑化すると安定な解を得る事が困難となる場合が多いことなどの問題がある。第3の方法では切り欠き長さのわずかに異なる2つの試験体を用いて、J積分とひび割れ幅の関係曲線を求める必要があるが、荷重変形曲線の微妙なバラツキがこの関係曲線に大きな影響を及ぼす事がある。第4の方法は、破壊進行領域を含む試験体の切り欠き先端を少しずつ切断しながらコンプライアンスを測定し、その変形特性から元々の破壊進行領域の長さを評価して引張軟化曲線を推定しようとするもので、高度の技巧が必要とされる。このように、引張軟化曲線を評価する4つの方法には、各々に問題点がある。

委員会報告書には、上述のJ積分に基づく方法を簡略化した新J積分法[8]も示されている。六郷等によって開発されたこの方法によれば、たった一体の試験体の実験から引張軟化曲線を得る事ができ、しかも元々のLiによって提案されたJ積分に基づく方法[9]よりも安定した結果が得られるところに特徴がある。J積分をひび割れ開口変位の半分の値の関数とする理論的根拠など検討を要する部分をも含むが、材料の引張軟化曲線の相対的評価法としては有用な方法と考えられる。

#### 4. ひびわれコンクリートの数値解析

ひびわれコンクリートの数値解析を行う上で、ひびわれコンクリートのモデル化及び引張軟化特性のモデル化の精度は極めて重要な問題である。そこで、委員会報告では既往のひびわれモデルを整理して解説を加え、破壊力学に基づいた考え方の導入意義を示した。また、既往の研究で提案されているコンクリートの引張軟化曲線モデルを分類整理して示し、CEB-FIP Model Code 1990[4]に導入された引張軟化特性の位置づけを明らかにした。

コンクリート及び鉄筋コンクリート(以下、RCと略す)部材の非線形挙動メカニズムの解明は、合理的な設計法を確立するうえで極めて重要な研究課題であり、古くから多くの実験的及び解析的研究が行われてきた。この分野の解析的研究で注目すべき点は、有限要素法(FEM)、境界要素法(BEM)剛体バネモデル(RBSM)、個別要素法(Distinct Element Method: DEM)などの高度な数値解析手法が登場し、コンクリート及びRC部材の非線形挙動のメカニズムが様々な角度、つまり、よりミクロなレベルから検討されるようになったことである。特に、非線形FEMは過去20年間にわたり目ざましい発展を遂げ、広く受け入れられると共に、この分野の研究発展に多大の貢献をしてきた。しかし、一見万能そうに見えるFEMではあるが、今だにいくつかの問題点を抱えている[10]。これらの問題点の一部、特に、ひびわれに起因する諸現象を説明しうる可能性の高い学問として、“破壊力学”が注目を集めている。そこで、アンケート調査を行い、その結果を材料として既往のFEMの問題点について整理し、これらを解決するうえでの破壊力学適用の可能性について検討した。質問とそれに対する返答内容は以下の通りである。

- 1) : 既往のFEMモデル化のうちで、その信頼性が十分に保証されていないと考えられるもの、及び信頼性が不十分である理由。

①入力としての材料物性（引張強度や付着強度等）、②ひびわれのモデル化（離散ひびわれモデルと分布ひびわれモデルの長所・短所、どの問題にいずれのひびわれモデルを適用すべきかの判断基準が不明等）、③各種非線形挙動メカニズムと構成則モデル（ひびわれ面間でのひびわれに直交する方向と平行な方向の応力伝達特性および鉄筋とコンクリート間の付着特性等）、④その他（寸法効果、非線形解析手法、クリープ・乾燥収縮・温度などの時間依存効果、繰返し荷重に対するひびわれの開閉、付着及びひびわれ面の劣化等）。

2) : 質問1で列挙した項目のうち、問題の解決を破壊力学に期待できると考えられる項目、及びその理由。

①ひびわれ強度とひびわれ面間の応力伝達特性、②付着特性、③寸法効果。

3) : 既往のFEMモデルが得手とする問題、不得手とする問題の分類・列挙。

FEMが得手とする問題：①応力場及びひずみ場が比較的一様であり、連続体とみなせる構造物、つまり、鉄筋及びひびわれを分布モデルにより表現できる構造物の挙動；②応力勾配があり、鉄筋の降伏がコンクリートの圧縮破壊や付着破壊に先行するRC構造物の挙動（例えば、曲げ破壊するRC梁）。

FEMが不得手とする問題：①寸法効果が顕著に現れる構造物の挙動（例えば、ダムのように大規模な無筋コンクリート構造物）；②ひずみの局所化や破壊の集中により、不連続体に近い挙動を示す無筋コンクリート及びRC構造物（例えば、コンクリート円柱供試体の割裂破壊、数本のひびわれが破壊挙動を支配するRC梁のせん断破壊、PC構造物の定着破壊等）；③その他（コンクリート及びRC構造物の繰返し履歴性状、疲労特性などの問題）。

4) : 質問3のFEMが不得手とする問題のうち、破壊力学による問題の解決が期待できると考えられるもの、及びその理由。

この質問に対する返答としては、質問3のFEMが不得手とする問題のうち、①と②が挙げられ、特にひびわれに起因する現象、寸法効果、付着割裂破壊強度、コンクリートの曲げ強度のひずみ勾配依存性などについては、破壊力学を考慮したFEM解析により妥当な評価がなされる可能性があるという指摘があった。

5) : 破壊力学の応用面に関する役割について期待するところ。

破壊力学の直接的な応用面としては、ひびわれの発生・進展の問題や、診断の際のひびわれ進展の予測といった問題への応用あるいは破壊力学に基づいた大規模構造物に対する設計コードの改良は重要な応用であり、そのための数値解析法の開発が期待される。

また、間接的な応用面としては、FEM等の高精度の解析における支援材料としての役割、即ち破壊力学により得られた成果をもとに、これを簡略化してFEMモデル等に取り入れる手法などが期待される。

さらに、これらの問題点のうち、①引張破壊基準（強度基準とエネルギー基準）と要素寸法、②ひびわれのモデル化（離散ひびわれモデルと分布ひびわれモデル）、③寸法効果などの問題を取り上げて考察し、破壊力学手法導入の有用性を示した。

また、破壊力学手法の理解を助け、解析を試みる時に便利のように、引張軟化特性を組み込んだ有限要素法と境界要素法による解析プログラム例を示し、ディスクサービスも行っている。

## 5. 構造物の解析と破壊力学

コンクリートのひびわれ特性に依存する構造部材の非線形挙動は数多い。中でも、構造物の解

析や設計に破壊力学的手法の適用が期待される理由の一つに、寸法効果の合理的な解釈が挙げられる。そこで、プレーンコンクリート及びコンクリート構造部材の力学的特性の寸法依存性について、内外の研究結果を概観し、考察を加えた。現状では、破壊力学手法を導入しても全ての寸法依存性を数値解析でシミュレートできる段階に至っているとは言い難いが、プレーンコンクリートの割裂引張強度や曲げ強度及び鋼コンクリート複合構造のせん断強度等の寸法依存性の解析例などを通して、破壊力学手法の可能性と今後の課題について明らかにした。

また、RC構造物の大型化に伴い、縮小モデルを用いた部材実験による実験式に基づいて構造物の安全性が検討される事が、今後も益々増えていくものと考えられる。そこに於いても寸法依存性の合理的な評価が重要であり、破壊力学が果たすべき役割について指摘した。

更に、主ひびわれの発生・伝播がその力学的特性を支配する付着・定着部の非線形挙動の機構解明や寸法依存性解明の試みも紹介した。現状では、破壊力学を生かしたより高精度の有限要素解析手法の開発と、その手法としての有効性を示すところに到達しつつある段階であり、今後、破壊力学モデル適用の妥当性を明瞭に示すための精度の高い実験資料も必要であり、解析においては、定量的な検討までを含んだ詳細な研究が期待される。

アンカーボルトの引抜き強度推定にも、その破壊現象の上から破壊力学の適用が期待され、これまでも幾つかの研究が報告されている。それらの結果より、アンカーボルトの最大耐力は次式で算定されよう [11]。

$$F_{max} = 2.1 (E G_F)^{1/2} h^{3/2} \quad (5.1)$$

ここに、Eはコンクリートのヤング率、hは埋込深さである。

更に、破壊力学の適用が期待される巨大構造物の代表例であるダムのはびわれ進展解析研究の現状等も紹介した。はびわれ発生の数値シミュレーション、はびわれの経路と安全性の予測及びはびわれの補修方法の有効性評価などに関して、米国などでは活発に研究が進められている。

## 6. 構造設計・設計規準と破壊力学

鋼構造物等の設計や安全管理に於いては、破壊力学は既に実用段階に入っており、大型重要構造物の設計には必須のものとなっている。一方、コンクリート構造物の設計に於いては、破壊力学手法の導入は必要ないのであろうか？ 導入すべきだとすれば、どういった事が考えられるであろうか？ コンクリートの非均質性に伴うコンクリートの破壊力学の複雑さの故に破壊力学がコンクリート構造物の設計に適用し難い事もさる事ながら、コンクリートは通常引張域を補強する鋼材と組み合わされてはびわれの発生・成長を抑えるように設計されるため、少なくとも線形破壊力学は極めて特殊な場合にしか適用できない。

しかしながら、コンクリート構造物の大規模化やコンクリートの高強度化が急速に進みつつある現在、次のような視点から破壊力学がコンクリート構造物の設計に導入されるべきであるという指摘がなされている。例えば、ACI-446委員会報告では、(1) はびわれ発生判定へのエネルギー規準導入の必要性；(2) 計算の客観的妥当性（例えば、有限要素の分割粗さへの解の依存性の問題）；(3) 降伏棚の欠如、エネルギー吸収能力と韌性（大規模構造物に対し極限解析では過大評価）；(4) 寸法効果、などが挙げられている [12]。また、種々の混和材、繊維補強コンクリートや超高強度コンクリートなどの新材料が通常の構造物にも使用されつつあるが、これら全く特性の異なる材料をも含んだ構造設計規準の合理的な大系化の為には破壊力学手法が重

要な役割をはたし得る事なども指摘されている [13]。更に、最小鉄筋比の合理化 [14] やせん断強度の寸法依存性評価式 [15] 等に関しても破壊力学の適用が期待される (図6.1, 6.2)。

### 7. 性能評価と破壊力学

コンクリート材料の性能評価への破壊力学の応用の可能性としては、新材料の開発指標として、あるいは実構造物の健全度診断や材料の損傷劣化評価の指標として、破壊力学パラメータを用いる方向が考えられる。材料開発に於ける破壊力学の応用例として、ALCの靱性向上と材料組織との関係、高強度コンクリートの圧縮強度と引張軟化特性の関係、鋼繊維コンクリートやポリマーコンクリートの破壊力学特性を示した。

実構造物の健全度診断は、様々な尺度から総合的に把握されるべきものであるが、中でもひびわれ抵抗性能評価には破壊力学の適用が考えられる。現状ではその応用例は少ないが、実構造物に与える損傷を比較的小さく抑える事ができるものとして、ブレイクオフ試験法や引抜き試験法が挙げられる。委員会報告書では、これら2つの方法の概要といくつかの問題点を示した。

ひびわれの累積・成長を伴う材料の損傷劣化の例としては、凍結融解や高温履歴の作用、アルカリ骨材反応、鉄筋の錆などが挙げられる。これらの問題への破壊力学的検討は極めて数少なく、今後の研究が待たれる。

### 8. 今後の展望

コンクリートの破壊力学は極めて新しい、発展途上の学問である。当研究委員会の2年間の活動では、問題を掘り起した段階で終っており、今後の研究に期待するところが大きい。とりわけ、破壊進展領域の実態解明とその力学的挙動のモデル化との関係解明；より合理的な引張軟化曲線評価法の開発；種々の非線形挙動の解析の積み重ねと、それに基づく構造設計や設計規準の合理化の検討；材料の損傷劣化と破壊力学パラメータとの関係に関する研究と既存構造物の健全度評価への応用技術の開発などが望まれる。

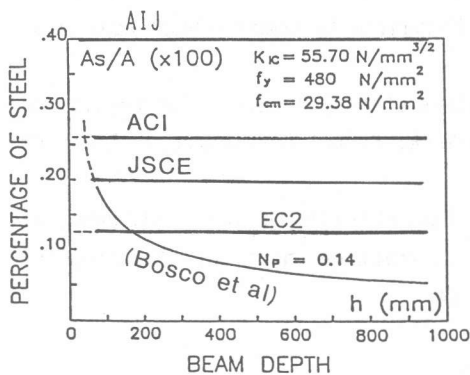


図6.1 はり高さhに対する最小鉄筋比

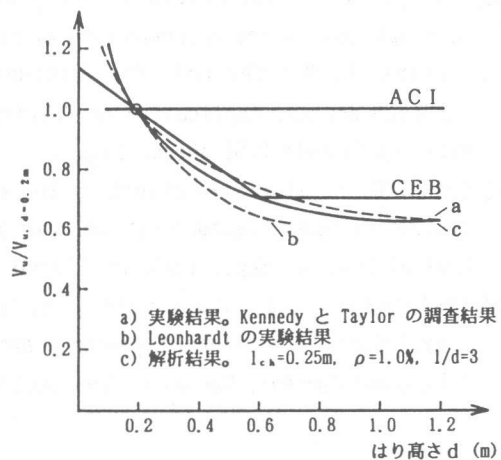


図6.2 Hillerborgらの解析結果とせん断強度の各規準との比較



参考文献

- [ 1 ] 三橋博三：コンクリートの破壊力学の現状と展望、コンクリート工学、Vol.25、No.2、1987年2月、pp.14-25
- [ 2 ] Wittmann, F.H. 編著：Fracture Mechanics of Concrete, Elsevier, 1983
- [ 3 ] Elfgren, L. 編著：Fracture Mechanics of Concrete Structures—from Theory to Applications, Chapman and Hall, 1989
- [ 4 ] Comité Euro-International du Béton : CEB-FIP model code 1990, Bulletin d'Information, No.190a, 1988
- [ 5 ] コンクリートの破壊力学研究委員会：コンクリート構造の破壊力学に関するコロキウム、日本コンクリート工学協会、JCI-C19、1990年3月
- [ 6 ] Li, V.C.: Summary of Session 1: Structure and fracture mechanisms of aggregative materials, in Fracture Toughness and Fracture Energy, Balkema, 1989, pp.135-142
- [ 7 ] Brühwiler, E., Wittmann, F.H. and Rokugo, K.: Influence of rate of loading on fracture energy and strain softening of concrete, Trans. of 9th SMIRT, Lausanne, Vol.H, 1987, pp.25-33
- [ 8 ] 六郷恵哲、岩佐正徳、鈴木泰生、小柳治：各種コンクリートの破壊力学パラメータ、コンクリート工学年次論文報告集、Vol.11、No.1、1989、pp.247-252
- [ 9 ] Li, V.C. and Ward, R. J.: A novel testing technique for post-peak tensile behavior of cementitious materials, in Fracture Toughness and Fracture Energy, (ed. H. Mihashi, T. Takahashi and F.H. Wittmann) Balkema, 1989, pp.183-195
- [ 10 ] JCIコロキウム：RC構造のせん断設計法に関する解析的研究論文集、日本コンクリート工学協会、JCI-C18、1989年10月
- [ 11 ] Eligehausen, R., Fuchs, W., Mayer, B.: Behavior of fastenings under tension loading. Betonwerk + Fertigteile-Technik, No.12, pp.826-832, 1987; No.1, pp.29-35, 1988
- [ 12 ] ACI Committee 446: Fracture Mechanics of Concrete, Chapter 1(Z.P. Bazant), Concepts, models and determination of material properties, 1990
- [ 13 ] Hawkins, N. M.: The role for fracture mechanics in conventional reinforced concrete design, Application of Fracture Mechanics to Cementitious Composites, Martinus Nijhoff Publishers, 1985
- [ 14 ] Bosco, C. et al.: Size effect on the minimum steel percentage for reinforced concrete beams, Fracture of Concrete and Rock: Recent Developments, Elsevier Applied Science, Sept. 1989, pp.672-681
- [ 15 ] Gustafsson, P.J. and Hillerborg, A.: Sensitivity in shear strength of longitudinally reinforced concrete beams to fracture energy of concrete, ACI Structural Journal, May-June 1988, pp.286-294