

論文

[2010] 等価線形法によるひびわれ幅・ひびわれ間隔の解析的研究

正会員○藤井健知（武蔵工業大学学生）

正会員 吉川弘道（武蔵工業大学土木工学科）

正会員 小玉克巳（武蔵工業大学土木工学科）

1. はじめに

RC部材は過度な引張荷重や曲げモーメントを受けると、引張部にひびわれが発生するが、工学的にはその発生強度よりひびわれ幅の大小がより重要な意味をもつ。本研究は、鉄筋とコンクリート両者の相互作用（付着応力～すべり関係）に基づき、ひびわれ幅・ひびわれ間隔を解析的に定式化するものである。特に、付着応力～すべり関係の非線形曲線を等価線形に置き換える方法を提案し、数値シミュレーションおよび実験結果との比較を行う。

2. ひびわれ開口のメカニズムと開口幅算定式の定式化

・付着の基本式とすべり量の分布：規則的なひびわれをもつRC単軸部材の、ひびわれ間隔半長における諸力学量を考える(図-1)。部材長手方向に部材軸xをとり、引張応力 σ はこの間に一様に作用する断面の平均的な応力とする。このような単軸問題では、鉄筋の変位とコンクリートの変位との差異がすべり量となることから、通例、次のようなすべり量 $g(x)$ に関する付着微分方程式が用いられる。

$$\frac{d^2 g(x)}{dx^2} = \frac{\phi_s}{A_s E_s} (1+n p) U_b \quad (1)$$

ここで、 A_s は鉄筋の断面積、 ϕ_s は鉄筋の全周長、 n は鉄筋とコンクリートの弾性係数比、 p は鉄筋比を表す。式(1)を解くには、局所付着応力 U_b とすべり量 g の関係式 $U_b = U_b(g)$ および2個の境界条件が必要となるが、 $U_b \sim g$ 関係が非線形の場合、解析的に求解できない場合が多い。そこで、ここではまず、勾配 $k U_0 / g_0$ をもつ次式のような線形の付着応力～すべり関係を仮定する。

$$\frac{U_b}{U_0} = k \frac{g}{g_0} \quad (2)$$

ここで U_0 は付着強度、 g_0 はそのときのすべり量、 k は無次元化した局所付着応力～すべり関係の勾配を示し、線形仮定に伴う補正係数となる。上式(2)を付着の基本微分方程式(1)に適用すると次式を得る。

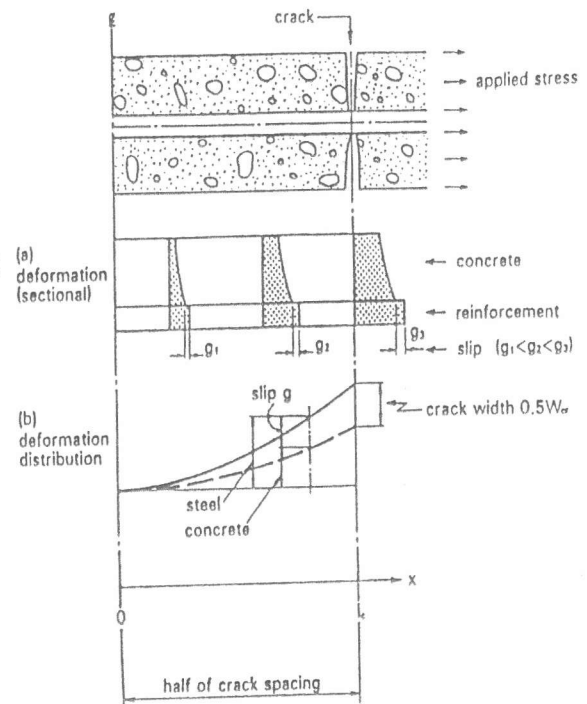


図-1 単軸引張を受ける鉄筋コンクリートとひびわれ間隔半長間の力学量

$$\frac{d^2 g(x)}{dx^2} = \frac{k U_0 \phi_s (1+np)}{g_0 A_s E_s} \quad g = \frac{g}{b_c^2} \quad (3a), \quad b_c = \left\{ \frac{k U_0 \phi_s (1+np)}{g_0 A_s E_s} \right\}^{-0.5} \quad (3b)$$

このとき、 b_c を付着特性値(bond characteristic coefficient)と呼び、長さ(cm)の次元をもつ。 b_c は付着に関する種々の要因(付着剛性、鉄筋量、周長)を一つのパラメータとして表現したもので(付着性状が良いほど b_c は小さくなる)、付着性状を記述する際の最も重要なパラメータとなる。前式に2つの境界条件を与えることにより、 $g(x)$ を次のように求解した。

$$g(x) = b_c \frac{\sinh(x/b_c)}{\cosh(l_c/b_c)} \frac{\sigma}{p E_s} \quad (4)$$

・ひびわれ間隔とひびわれ幅：以上の展開の中でひびわれ間隔は、付着特性値や作用応力によって変動(減少)する変数(状態量)である。まず、ひびわれの全くない状態において最初のひびわれが発生する応力条件は、鉄筋とコンクリート両者の剛性とコンクリートの単軸引張強度 f_t を用いて $\sigma = (1+np)f_t$ のように表すことができる。この応力レベルを境にして全断面有効状態からひびわれ断面へと移行する。その後の応力増加によってひびわれ間中点におけるコンクリートの引張応力が f_t に達すると、そこに2次ひびわれが生じひびわれ間隔は半分になる。そこで、ひびわれ間隔を上限値 $2l_c$ によって表すと、次式のようなになる[1]。

$$2l_c = 2b_c \cosh^{-1} \left\{ \frac{\sigma}{\sigma - (1+np)f_t} \right\} \quad (5)$$

また、ひびわれ間隔 l_c を付着特性値 b_c で正規化した無次元量を $\mu_c = l_c/b_c$ のように定義する。

一方、ひびわれ幅は付着すべり理論から、『鉄筋とコンクリートとのひずみの差をひびわれ間隔全域にわたって積分したもの』と解釈することができる。これにすべり量の勾配とひずみとの関係式 $dg/dx = \varepsilon_s - \varepsilon_c$ を代入すると次式を得る。

$$W_{cr} = 2 \int_0^{l_c} \frac{dg(x)}{dx} dx = 2g(x=l_c) \quad (6)$$

これはまた、ひびわれ位置におけるすべり量を2倍したものである。以上がひびわれ幅の理論的な定義となるもので、これに局所付着応力～すべり関係 $U_b = U_b(g)$ もしくは、その結果得られるすべり分布 $g = g(x)$ を与えることによりひびわれ幅 W_{cr} は求められる[2]。すなわち、

$$W_{cr} = 2b_c \tanh \left[\cosh^{-1} \left\{ \frac{\sigma}{\sigma - (1+np)f_t} \right\} \right] \frac{\sigma}{p E_s} \quad (7)$$

また、既往の実験式のようにひびわれ位置における鉄筋応力 σ_s^* の関数として表すとすれば、 $\sigma_s^* = \sigma/p$ となる関係より、次式のように書き換えられる。

$$W_{cr} = 2b_c \tanh(\mu_c) \frac{\sigma_s^*}{E_s}, \quad \mu_c = \cosh^{-1} \left\{ \frac{p \sigma_s^*}{p \sigma_s^* - (1+np)f_t} \right\} \quad (8)$$

3. 付着応力～すべり関係を非線形モデルに拡張した場合

本章では、付着応力～すべり関係に関する非線形性を合理的に取り扱うため、等価な付着特

性値 b_s^* を導入することにより、より現実的なひびわれ幅算定法を提案する。

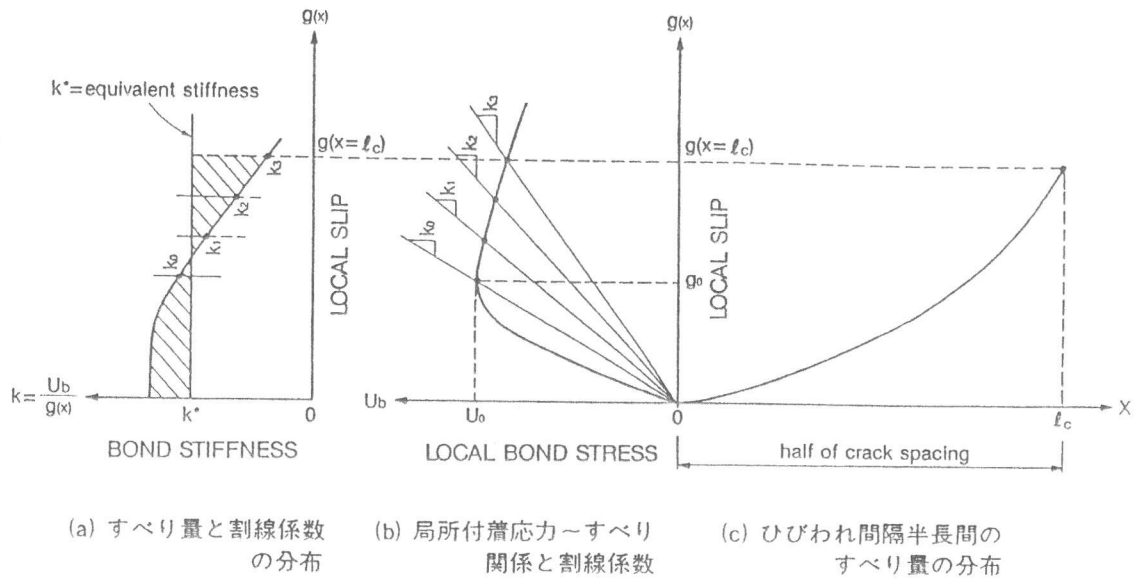


図-2 すべり量の分布、付着応力、割線係数の関係

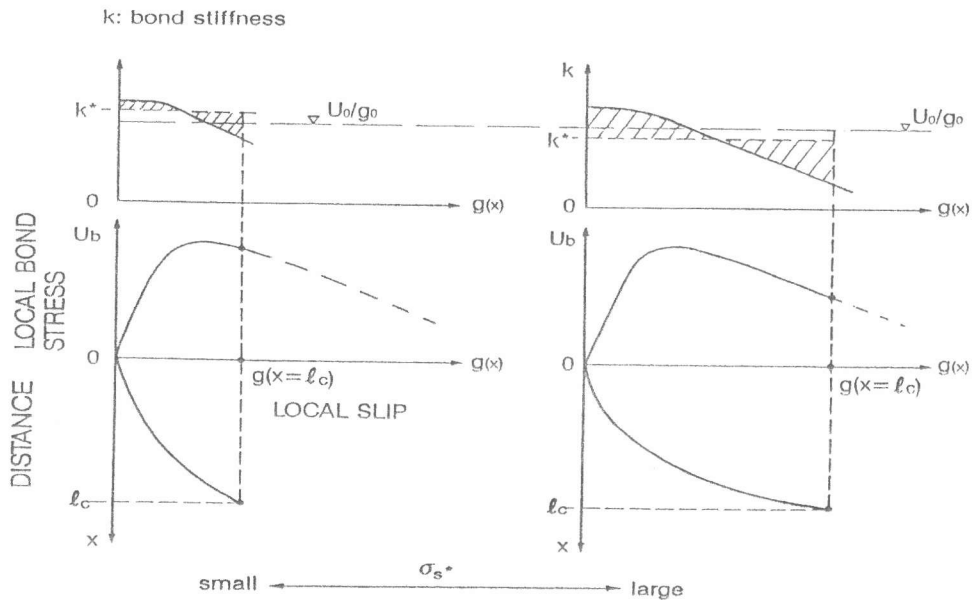


図-3 荷重応力レベルと等価付着剛性の違い

付着応力～すべり関係における割線勾配 $k(g) \equiv U_b(g)/g(x)$ は、各位置で一定値をとらない(図-2)。そこで、ひびわれ間隔半長分 ($x=0 \sim l_c$) における割線係数 k の平均値 k^* として次式を考えた。

$$k^* = \frac{1}{g(x=l_c)} \int_0^{g(x=l_c)} \frac{U_b}{g} dg \quad (9)$$

この等価割線係数 k^* は、すべり量 $g (x=0 \sim 1c)$ のひびわれ区間における割線係数の分布曲線によって得られるものである (図-2(a))。上式に任意の非線形式を代入して積分方程式を解くことは一般に不可能な場合が多く、本文では台形公式による数値解析法によって処理した。これは、載荷応力レベル (σ, σ_s^* など) の増加により、付着剛性がひびわれ開口位置より徐々に低下する様子を平均的に表現したものであり、図-3はこれを模式的に示したものである。この k^* を式(3b)に適用すると次のように書き換えられる。

$$b_s^* = \left\{ \frac{k^* \phi_s (1 + np)}{A_s E_s} \right\}^{-0.5} \quad (10)$$

上式によって与えられた値を等価付着特性値とよび、このような処理を等価線形法とよぶことにする。 b_s^* を b_c (式(3b)) の代わりに式(5)に用いればひびわれ間隔 $2l_c$ が、式(9)に用いればひびわれ幅 W_{cr} が求まる。

ここで、付着応力～すべり関係の非線形モデルには、森田らの式 (e 関数式) [3] と 2 次曲線式 [4] を用いた。すなわち、

$$\text{森田らの式 } \frac{U_b}{U_0} = e^{-\frac{\ln\left\{(e-1)\frac{g_x}{g_0} + 1\right\}}{(e-1)\frac{g_x}{g_0} + 1}}, \quad \text{2次曲線式 } U_b = U_0 \left\{ 1 - \left(1 - \frac{g}{g_0} \right)^2 \right\}$$

数値シミュレーション

付着特性値として、線形解をもとにして b_c および b_c^* を用いた等価線形法による方法との両者の比較を図-4 に示した。この図では、ひびわれ位置での鉄筋応力と (a) 付着特性値, (b) ひびわれ間隔, (c) ひびわれ幅, の 3 図を表している。また、鉄筋比 p 及び付着強度 U_0 をパラメータとしたシミュレーション結果を図-5 に示した。

図-4, 図-5 より、鉄筋の引張応力 σ_s^* の増加に伴って、ひびわれ発生後、等価線形法では付着特性値が徐々に増加し、これに伴って、ひびわれ間隔は減少、ひびわれ幅は増加していることがわかる。また、鉄筋比の増加や付着強度の増加など、付着剛性が良好となるほど、ひびわれ間隔・ひびわれ幅は減少して、一般的なひびわれ挙動と合致していることがわかる。すなわち、等価線形法によりひびわれ開口の挙動を合理的かつ簡便に処理することができ、加えて式(3)のような 2 階常微分方程式の直接的な数値解析 (例えば、[4], [6]) を回避できることが最も大きな特徴である。

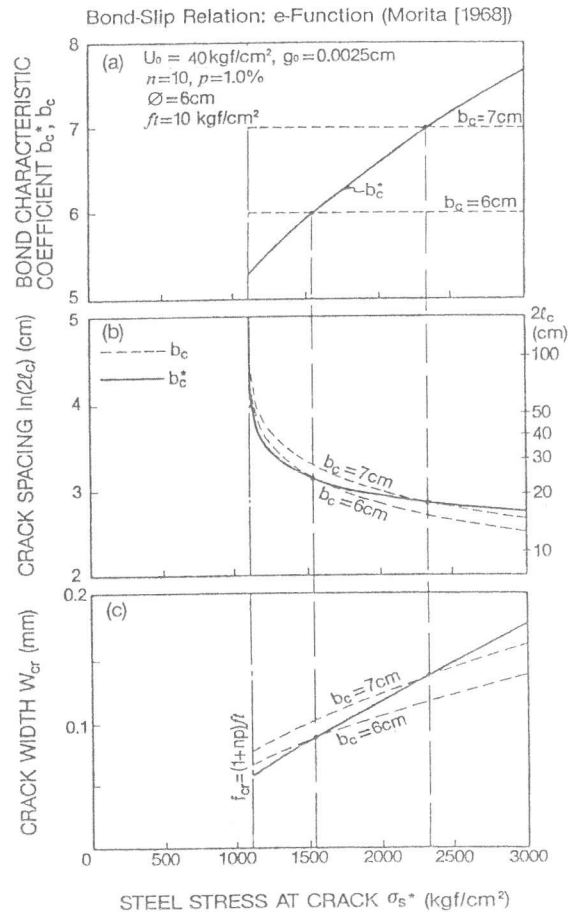


図-4 b_c と b_c^* を用いた場合の比較

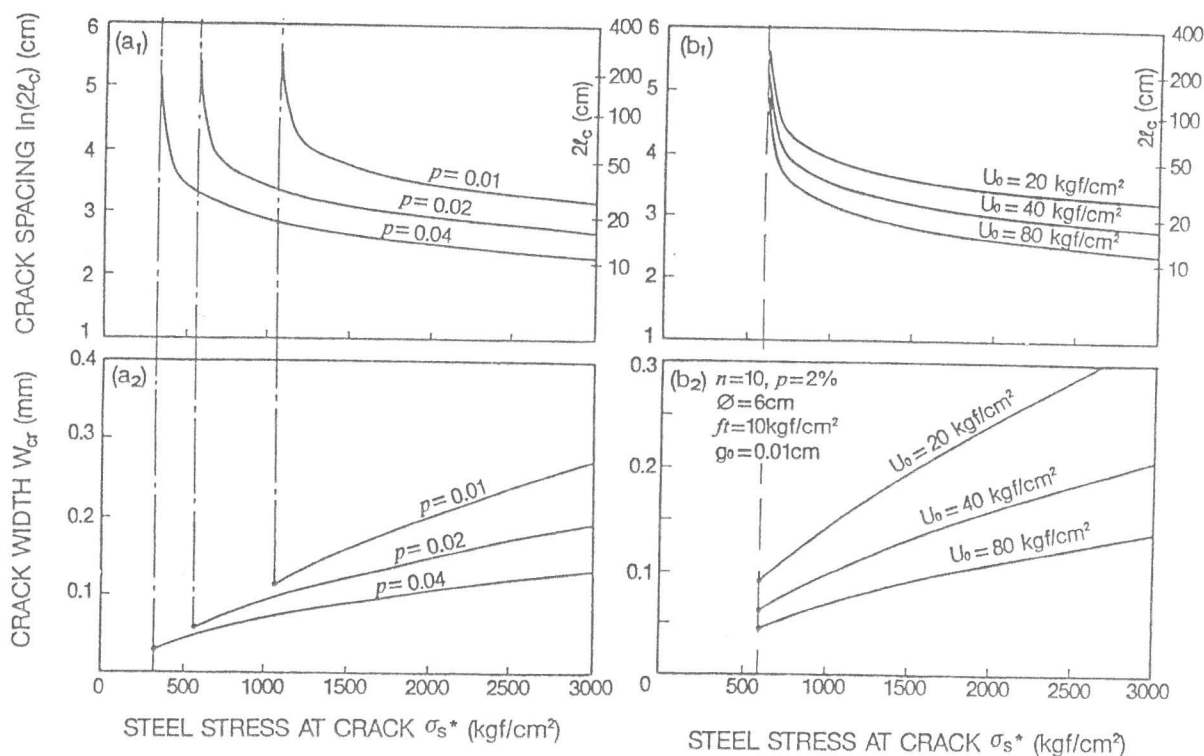
(a) 鉄筋比 p による数値シミュレーション(b) 付着強度 U_0 による数値シミュレーション

図-5 等価線形法による数値シミュレーション

4. 既往実験値との比較

既往の実験結果と等価線形法による付着特性値を用いた場合の計算値との比較を行い、その結果を図-6に示した。(a)は単軸引張材の両引試験[5]によるひびわれ間隔を表したものであり、(b)は、はりの曲げ試験[4]である。いずれも、局所付着応力～すべり曲線として森田らの式(e関数式)と2次曲線式を用いている。

実験概要

	形式	部材断面 (cm^2)	鉄筋	弾性係数比 n	鉄筋比 p (%)	鉄筋周長 ϕ_s (cm)	鉄筋引張強度 f_t (kg/cm^2)	最大付着強度 U_0 (kg/cm^2)	すべり量 g (cm)	出典
(a)	単軸引張	9.5×9.5	D16	7	2.2	5	19.2	40*	0.01*	森田[5]
(b)	曲げ引張	10×10	4×D16	15	2.35	20	10	30*	0.005*	佐藤[4]

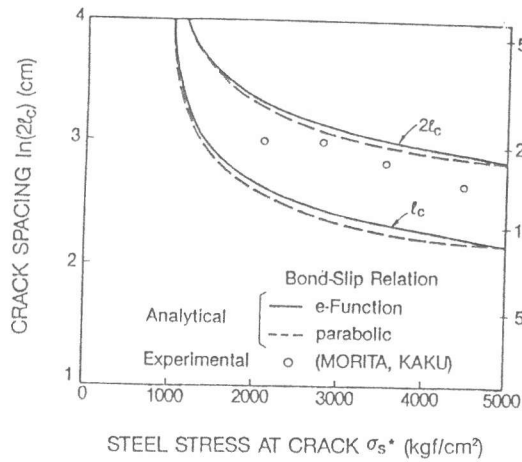
* は、推定値

前述の単軸引張による理論を曲げひびわれに対して拡張する方法としては、鉄筋比をコンクリート引張領域に対する鉄筋総面積の比として再定義することによる。このような変更により、単軸部材における定式化をそのまま延長できると考える。具体的な方法として、CEB-FIP [Model Code for Concrete Structures (1978)] による、引張領域断面積 $A_c = b(7.5d_b + c)$ (b : 部材幅 d_b : 鉄筋の直径 c : かぶり) を採用した。

図-6 から判断されるように、いずれの場合も、付着性状(付着強度 U_0 、すべり量 g_0)には推定値を用いているが、ひびわれ間隔の減少やひびわれ幅の増大など、ひびわれ挙動を解析的

にシミュレートできることが分かった。また、付着曲線として、森田らの式（e関数式）および2次関数式の2つの非線形モデルを採用し、ひびわれ間隔・ひびわれ幅の試算を行ったが、算出結果に大きな違いはなく、むしろ、付着強度とそのときのすべり量、鉄筋比、鉄筋周長に依存することがわかった。

(a) 森田らの実験（単軸引張材の両引試験）



(b) 佐藤らの実験（はりの曲げ試験）

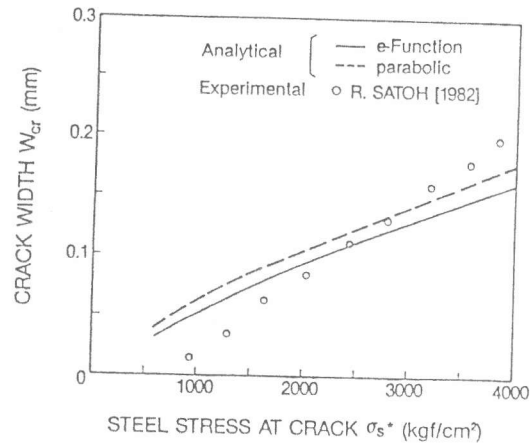


図-6 等価線形法による計算値と実験値との比較

5. 結論

- ① 通例用いられる、付着の常微分方程式と線形な付着応力～すべり関係から、ひびわれ幅・ひびわれ間隔の解析解を求めた。この中で、付着挙動を支配する、鉄筋とコンクリートの剛性、付着剛性、鉄筋量と周長などをただ1個のパラメータ、付着特性値として表現することが可能となった。
- ② さらに、非線形な付着曲線に対しては等価線形法により、上記の線形解をそのまま準用することができた。これにより、引張過程における、付着劣化を合理的かつ簡便に再現することができ、より現実に近いものとなった。
- ③ 本提案手法を実験結果と比較し、両者の良好な対応を確認することができた。ここでは、鉄筋比を再定義することにより、曲げ部材にも拡張することができた。

〈参考文献〉

- [1] 吉川弘道・田辺忠顕：鉄筋コンクリート部材の引張剛性に関する解析的研究、土木学会論文集、第366号 V-4, 昭61.6, pp.93～102
- [2] 吉川弘道・石川雅美：鉄筋コンクリート部材のひびわれ開口量算定に関する解析モデルと温度応力問題への適用、「コンクリート構造物の体積変化によるひびわれ幅制御」に関するコンクリート論文集、日本コンクリート工学協会、1990.8, pp.97～106
- [3] 白井伸明：鉄筋コンクリートの付着～ひびわれモデル、第2回RC構造のせん断問題に対する解析的研究に関するコンクリート論文集、日本コンクリート工学協会、1983.10, pp.9～16
- [4] 佐藤良一：RC曲げ部材の変形・ひびわれに及ぼす付着の影響に関する解析的研究、第4回コンクリート工学年次講演会論文集、1982, pp.265～268
- [5] 森田司郎：鉄筋コンクリート部材の引張り試験による付着効果の研究、セメント技術年報
- [6] 上田正生・土橋由造：軸力を受ける鉄筋コンクリート棒部材の材料非線形付着すべり解析、土木学会論文集、第360号/v-3, 1985.8, pp.71～80