

論文

[2006] 有限要素解析における板要素と3次元要素の接合方法
に関する研究

正会員○村中健二 (名古屋大学大学院)
正会員 田辺忠顕 (名古屋大学土木工学科)

1. 序論

板的挙動を示すマット上に構造物が付帯している場合の解析などでは、その付帯した構造物の局所的な応力挙動を、詳細にとらえる必要が生ずる場合がある。例えば、原子炉を支持するベースマットと格納施設の一体的な応力解析の問題などがその例である。この種の問題では、付帯した構造物は局所的に3次元挙動を示すので、単純に構造物全体を板として考えることはできず、何らかの形で3次元解析を行う必要がある。しかし、構造物全体に対して3次元解析を行うとすれば、そのデータ作成が極めてはん雑となり、また計算時間も膨大なものとなる。

そこで、本研究においては、ラグランジュの未定乗数法を用いて異自由度を有する板曲げ要素と3次元要素に対する結合の定式化を行い、ある部分を板要素と見なせるRC構造物を、大きな板要素とそれを補う局所的な3次元要素の結合体として考え、自由度を減らした解析を行う。

2. 解析理論

2.1 ラグランジュ未定乗数法による異要素間の結合の定式化[1]

異なった自由度を有する2つの要素を結合するために、結合される節点間に体積のない仮想空間を考慮することで平衡方程式を導く。図-1に示すような仮想の境界面上での両要素の変位差が零になる条件を、ラグランジュの未定乗数法を用いて表すと、次の変分式が得られる。

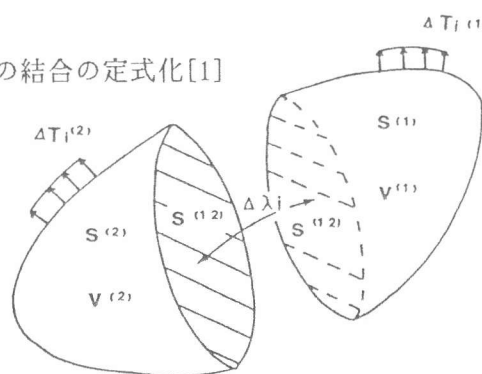


図-1 連続な2つの領域

$$\sum_{\alpha=1}^2 \left[\int_{V^{(\alpha)}} \delta[\Delta \epsilon^{(\alpha)T}][\Delta \sigma^{(\alpha)}] dV - \int_{S_{\sigma}^{(\alpha)}} \delta\{\Delta u^{(\alpha)T}\} \{\Delta T_i^{(\alpha)}\} dS \right] - \delta \int_{S^{(12)}} \{\Delta \lambda\}^T [\{\Delta u^{(1)} - \Delta u^{(2)}\}] dS = 0$$

ただし、()内の添字 $\alpha=1, 2$ は、結合される2つの領域を示し、 $S^{(12)}$ は領域 $V^{(1)}$, $V^{(2)}$ の間の仮想境界面、 $S_{\sigma}^{(\alpha)}$ は表面力 ΔT_i が作用する面である。

ここで、領域 $V^{(\alpha)}$ における変位 $\Delta u^{(\alpha)}$ の補間マトリクスを $[\Phi^{(\alpha)}]$, 仮想結合要素の変位 $\Delta u^{(\alpha)}$ の補間マトリクスを $[\Psi^{(\alpha)}]$ とすると、それぞれの領域に対する変位ベクトル $\{\Delta u^{(\alpha)}\}$ と $\{\Delta u^{(\alpha)}\}$ は、節点変位ベクトル $\{\Delta q^{(\alpha)}\}$ を用いて次のように表される。

$$\{\Delta u^{(\alpha)}\} = [\Phi^{(\alpha)}] \{\Delta q^{(\alpha)}\} \quad (V^{(\alpha)} \text{ において}) \quad (2)$$

$$\{\Delta u^{(\alpha)}\} = [\Psi^{(\alpha)}] \{\Delta q^{(\alpha)}\} \quad (S^{(12)} \text{ において}) \quad (3)$$

さらに、 $S^{(12)}$ 上のラグランジュ未定乗数 $\Delta \lambda_i$ は、ラグランジュ乗数—一般化座標マトリクス $[\Omega]$ を用いて次のように表される。

$$\{\Delta \lambda\} = [\Omega]\{\Delta \gamma\} \quad (4)$$

ここで、 $\{\Delta \gamma\}$ は $S^{(12)}$ 上の結合要素に関する一般化座標ベクトルである。式(2)～(4)を式(1)に代入すると、次の変分式が得られる。

$$\sum_{\alpha=1}^2 \delta\{\Delta q^{(\alpha)}\}^T [[K^{(\alpha)}]\{\Delta q^{(\alpha)}\} + [\hat{K}^{(\alpha)}]\{\Delta \gamma\} + \{\Delta F^{(\alpha)}\}] + \delta\{\Delta \gamma\}^T \sum_{\alpha=1}^2 [\hat{K}^{(\alpha)}]^T \{\Delta q^{(\alpha)}\} = 0 \quad (5)$$

$$[K^{(\alpha)}] = \int_{V^{(\alpha)}} [B^{(\alpha)}]^T [D^{(\alpha)}] [B^{(\alpha)}] dV \quad (6)$$

$$[\hat{K}^{(1)}] = - \int_{S^{(12)}} [\Psi^{(1)}]^T [\Omega] dS \quad (7)$$

$$[\hat{K}^{(2)}] = \int_{S^{(12)}} [\Psi^{(2)}]^T [\Omega] dS \quad (8)$$

$$\{\Delta F^{(\alpha)}\} = - \int_{V^{(\alpha)}} [B^{(\alpha)}]^T [D^{(\alpha)}] \{\varepsilon^{(\alpha)}\} dV - \int_{S^{(\alpha)}} [\Phi^{(\alpha)}]^T \{\Delta T_i^{(\alpha)}\} dS \quad (9)$$

ただし、 $[K^{(\alpha)}]$ ($\alpha=1, 2$) は、領域 $V^{(\alpha)}$ の剛性マトリクス、 $[\hat{K}^{(\alpha)}]$ は両領域の結合面での結合に関するマトリクス、 $\Delta F^{(\alpha)}$ は領域 $V^{(\alpha)}$ にかかる外力ベクトルである。

ここで、 $\delta\{\Delta q^{(\alpha)}\}$ と $\delta\{\Delta \gamma\}$ は任意の値を持つことにより、最終的に次の平衡方程式が導かれる。

$$\begin{bmatrix} [K^{(1)}] & [0] & [\hat{K}^{(1)}] \\ & [K^{(2)}] & [\hat{K}^{(2)}] \\ sym. & & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta q^{(1)}\} \\ \{\Delta q^{(2)}\} \\ \{\Delta \gamma\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\Delta F^{(1)}\} \\ \{\Delta F^{(2)}\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

2. 2 板要素と3次元要素の結合

図-2に示す様な板要素とそれに付帯した3次元要素から成るモデルを考え、上記のラグランジュ未定乗数法を用いることで異自由度を有する両要素の結合を試みた。ここで、板要素はz方向変位、x, y方向回転角の節点自由度を持つ板曲げ要素とし、3次元要素はx, y, z方向の変位自由度をもつアイソパラメトリック要素とすれば、それぞれの要素に対する節点変位ベクトルは、

$$\{\Delta q^{(1)}\} = \Delta\{w, \theta_x, \theta_y\}^T \quad \{\Delta q^{(2)}\} = \Delta\{u, v, w\}^T \quad (11)$$

となる。ここで、板要素領域は上添え字1で、3次元要素領域は上添え字2で表している。

仮想結合要素の変位ベクトル $\{\Delta u^{(\alpha)}\}$ はx, y, z方向の変位成分だけを持つと仮定すれば

$$\{\Delta u^{(1)}\} = \{\Delta u^{(2)}\} = \Delta\{u, v, w\}^T \quad (12)$$

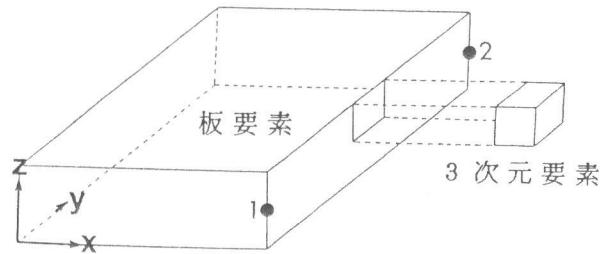


図-2 結合の概念図

従って、板要素と仮想結合要素の補間マトリクスは次のようになる。

$$[\Psi^{(1)}] = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & -z \frac{\partial N_3}{\partial x} & -z \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & -z \frac{\partial N_6}{\partial x} \\ -z \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & -z \frac{\partial N_3}{\partial y} & -z \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & -z \frac{\partial N_6}{\partial y} \\ N_1 & 0 & N_3 & N_4 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \quad (13)$$

ここで、 N_1, N_3 は、図-2の板側要素の節点1における w, θ_y に対する形状関数であり、 N_4, N_6 は節点2に対応するものである。

一方、3次元要素と仮想結合要素の補間マトリクスは、2次元4節点の形状関数 φ_i を用いて次式で表される。

$$[\Psi^{(2)}] = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & 0 & 0 & \varphi_3 & 0 & 0 & \varphi_4 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & 0 & 0 & \varphi_3 & 0 & 0 & \varphi_4 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & 0 & 0 & \varphi_3 & 0 & 0 & \varphi_4 \end{bmatrix} \quad (14)$$

次にラグランジュ乗数について考える。ラグランジュ乗数は x, y, z 方向変位に対応する3つの量を考える。当初3つの量それぞれが、過去の研究[1]において行われているように、結合面内で一定であると仮定した。その場合、式(4)は次のようになる。

$$\{\Delta\lambda\} = \{\lambda^u \ \lambda^v \ \lambda^w\}^T \quad (15)$$

$$\{\Delta\gamma\} = \{\Delta\gamma_1^u \ \Delta\gamma_1^v \ \Delta\gamma_1^w \ \Delta\gamma_2^u \ \Delta\gamma_2^v \ \Delta\gamma_2^w \ \Delta\gamma_3^u \ \Delta\gamma_3^v \ \Delta\gamma_3^w \ \Delta\gamma_4^u \ \Delta\gamma_4^v \ \Delta\gamma_4^w\}^T \quad (16)$$

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

しかし、上のように仮定した場合、ラグランジュ乗数による力は、どの節点においても常に同じ方向、同じ大きさで出てきてしまうという理論的欠陥が明らかとなり、板要素と3次元要素を結合する場合には、従来なされていた結合面内でラグランジュ乗数一定の仮定を用いることはできないことが判明した。従って、本研究では板要素と3次元要素の結合については、高次のラグランジュ乗数一般化座標マトリクスを用いることとし、2次元のアイソパラメトリック要素の形状関数を用いこれを次式で定義した。

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & 0 & 0 & \varphi_3 & 0 & 0 & \varphi_4 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & 0 & 0 & \varphi_3 & 0 & 0 & \varphi_4 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & 0 & 0 & \varphi_3 & 0 & 0 & \varphi_4 \end{bmatrix} \quad (18)$$

最終的に板要素、3次元要素と仮想結合要素との要素結合マトリクスが次式のように求まる

$$[\hat{K}^{(1)}]_e = - \int_{S^{(12)}} [\Psi^{(1)}]^T [\Omega] dS \quad (19)$$

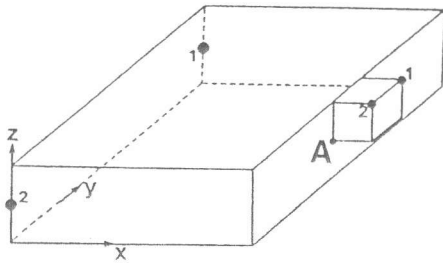
$$[\hat{K}^{(2)}]_e = \int_{S^{(12)}} [\Psi^{(2)}]^T [\Omega] dS \quad (20)$$

また、一般的に多数の3次元要素を結合する場合には、上のように求めた要素結合マトリクスから、次のように全体の結合マトリクスを求める。

$$[\hat{K}^{(\alpha)}] = \sum_{e=1}^n [\hat{K}^{(\alpha)}]_e \quad (21)$$

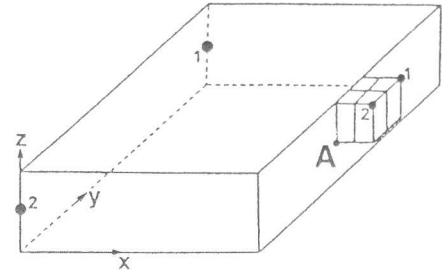
3. 数値実験モデル

2. で述べた理論により異自由度を有する板要素と3次元要素の結合が可能となる。そこで以下の数値モデルに対し本手法の適用を行った。



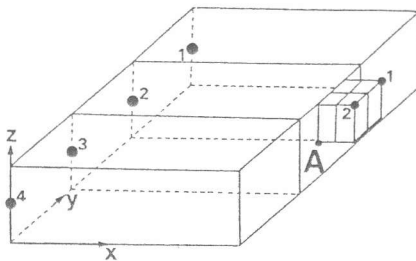
板要素が100cm×100cm×20cm の1要素
3次元要素が10cm×10cm×10cm の1要素

図-3 解析モデル1



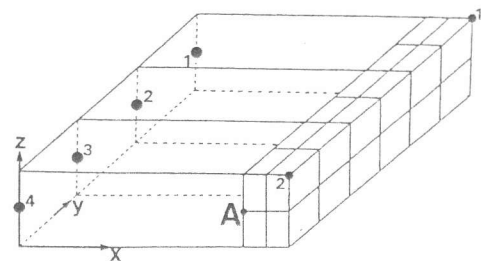
板要素が100cm×100cm×20cm の1要素
3次元要素が5cm×5cm×10cm の4要素

図-4 解析モデル2



板要素が100cm×33.3cm×20cm の3要素
3次元要素が5cm×5cm×10cm の4要素

図-5 解析モデル3



板要素が100cm×33cm×20cm の3要素
3次元要素が10cm×16.5cm×10cm の4要素

図-6 解析モデル4

モデル1、2では板側節点1、2の、モデル3、4では板側節点1、2、3、4のz方向変位とy軸回りの回転 θ_x を拘束し、荷重を3次元要素側節点1、2のz軸方向に、各-1000kg載荷した解析を行う。ここで、コンクリートの特性としては、弾性係数 $E = 210000(\text{kgf}/\text{cm}^2)$ 、ポアソン比 $\nu = 0.2$ を用いている。

4. 解析理論の検証

4.1 板要素と3次元要素の結合状態

前章に示したモデルに対する解析結果を表-1に示す。表-1は図-3～図-6のモデル1、2、3、4に対するA点でのz方向変位を両要素に対して求めたものである。

表-1 結合状態

	板側変位(cm)	3次元要素側変位(cm)	誤差(%)
モデル1	-0.054613	-0.054654	0.075
モデル2	-0.054695	-0.054706	0.020
モデル3	-0.048280	-0.048288	0.017
モデル4	-0.046772	-0.046786	0.030

モデル1、2、3、4ともに両要素での変位差は上3桁まではほぼ一致しておりその誤差は0.1%以下である。本論文に示す方法により板要素と3次元要素が精度良く結合できることがわかる。

4.2 MARCとの比較

次にモデル3に対して本手法を適用した結果と、一般に有限要素解析に用いられる汎用プログラムMARCで、モデル3を92要素の立体要素に分割した結果との比較を行った。図-7に本手法による変位図と、MARCの計算結果による変位図を併わせて示す。実線が本手法による結果を、点線がMARCによる結果を示している。また、図-8にMARCによる要素分割を示す。

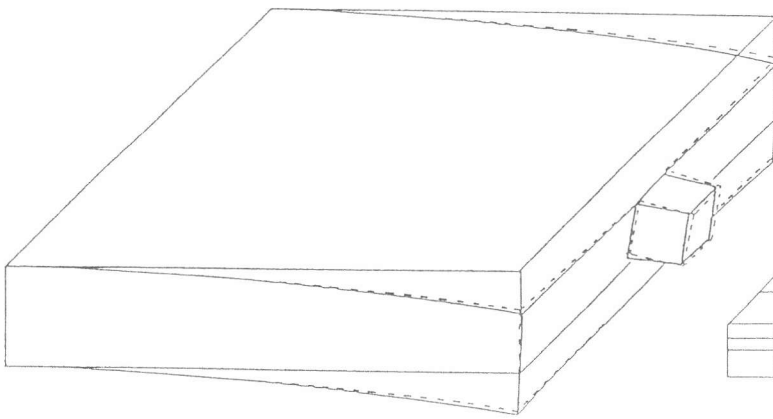


図-7 変位図

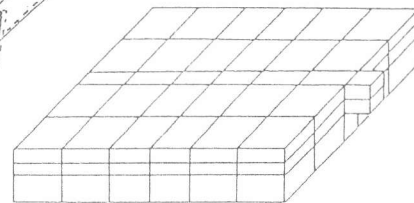


図-8 MARCによる要素分割

図の中で、不一致が見られることの原因は、モデル3で板要素を使っている部分もすべて3次元要素分割をしていることにあると考えられる。またモデル3の3次元要素が4要素であるのに対し、MARCの対応する部分の要素数が2要素であることも差異を生じた原因であろう。

上のようなモデルの場合、MARCによる全自由度が522自由度であるのに対して、本手法による全自由度は78自由度であり大幅な自由度の低減を行うことが可能となった。

4.3 分割要素数による誤差

次に板要素、3次元要素の分割要素数による精度の検討を、MARCで92要素の3次元要素

に分割した結果と比較することで行った。比較は図-9に示す1、2、3点でのz軸方向変位で行った。各点に対応する結果を表2に示す。

表-2 分割要素数による変位の違い (単位: cm)

	点1	点2	点3
モデル1	-0.048510	-0.060118	-0.054654
モデル2	-0.048525	-0.063819	-0.054706
モデル3	-0.044781	-0.056819	-0.048288
MARC	-0.039478	-0.057646	-0.044068

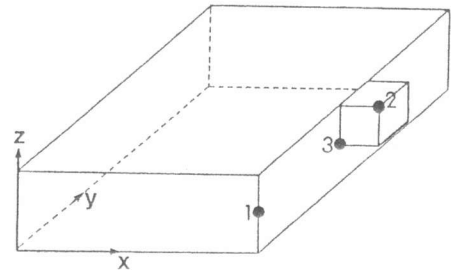


図-9 求める変位位置

表-2から分かる通り、板要素を1要素(モデル2)から3要素(モデル3)に増やすことにより、著しくMARCの値に近づく。このことは、MARCの値が十分な要素分割をして収束した値で、ほぼ真の値とみて良いことから、板要素が1要素のみでは、実際の挙動を正確に反映し得ないことを示している。従って、板要素も必要な精度に応じて要素分割を必要とすることが明かとなった。

5. 結論

本研究は、ラグランジュの未定乗数法により、異自由度を有する板曲げ要素と3次元要素の結合の定式化を行うことが、一義的な目的であり、両要素の変位が精度よく一致したことによりその目的は達成させられたと言えよう。

研究の過程において、ラグランジュ乗数の3つの成分を、結合面内で一定と仮定した結果、板要素と3次元要素の結合では、より精緻な補間が必要であることがわかった。そして、ラグランジュ乗数—一般化座標マトリクス $[\Omega]$ にアイソパラメトリック要素と同じ形状関数を用いることによって、良い値を得ることができた。

また、4.3にみられるように、板要素側もある程度の分割が必要なことが明らかになった。板要素の変位は、3次元要素側の変位に影響を与えることから、必要な精度に応じて、いくつかに分割をして、精密さを与える必要がある。

以上をまとめて、本研究の成果を書き下すと以下のようになる。

1. ラグランジュ乗数を、結合面内で一定としては理論的矛盾を生ずる。
2. 板側要素は、ある程度の分割が必要なものの、非常に少ない分割数で対応し得る。
3. モデル4のように一般的に多数の3次元要素を板要素に結合することが可能となり大幅に自由度を減らした解析が可能となった。

参考文献

- 1) 矢川元基、渡辺隆之、石渡 俊：ラグランジュ乗数法を用いた効率的な弾塑性構造解析用プログラム”EPAS”の開発と応用、日本機械学会論文集(A編) pp.87-96, 1980