

論文

[2155] はり要素による引張軟化の解析的研究

正会員 伊良波繁雄 (琉球大学土木工学科)

1. はじめに

近年、コンクリートの引張破壊に対して破壊力学を適用しようとする研究が多く行われている [1]。有限要素法でコンクリートのひびわれを解析する際、平面要素を用いて引張軟化の解析を行う方法は厳密であるが、計算コストがかかるという問題点がある。従来、鉄筋コンクリートはりの解析では断面分割法のようにはり理論を用いた研究が多く行われ、多くの成果が得られている。そこで、本研究では計算コストを軽減するために、はり理論を用いてコンクリートの引張軟化を考慮した解析を行う方法を述べる。

筆者は既報 [2] でトラス要素で引張軟化を解析するための弾塑性剛性方程式を導き、その弾塑性剛性方程式を用いて、コンクリートが急激に破壊する現象すなわち snap-back が現れる様な破壊でも解析できるような増分法のアルゴリズムを示した。本研究ではトラス要素の弾塑性剛性方程式を応用して、はり要素の弾塑性剛性方程式を導く方法を示す。

解析例としては切欠きを有するコンクリートの直接引張試験、コンクリートはりの曲げ試験の解析例を示し解析方法の妥当性を検討した。

2. 解析方法

2.1 引張軟化を考慮したはり要素の弾塑性剛性行列

既報 [2] で示したトラス要素の弾塑性剛性方程式は、次のように表すことできる。

$$[K_{op}] = \frac{C_1 EA}{E + C_1 L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

ここで、Eはヤング係数、Aは棒の断面積、Lは棒の長さ、 $C_1$ は図-1に示す引張軟化曲線の勾配(負)である。なお、式(1)の係数 $C_1 EA / (E + C_1 L)$ は図-2に示すように、要素の内部にバネ剛性 $C_1$ を有する棒の剛性と同じである [2]。

本研究では図-3に示すように、1本のはりをはり高方向だけに分割し、ひびわれの生じている層のヤング率を $C_1 E L / (E + C_1 L)$ として、はり要素の弾塑性剛性方程式を導く。

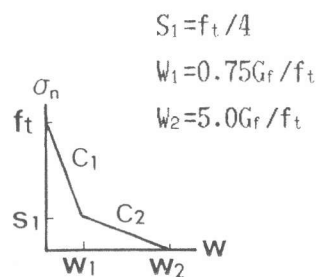


図-1 引張軟化曲線

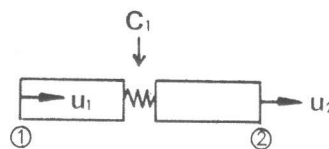


図-2 トラス要素

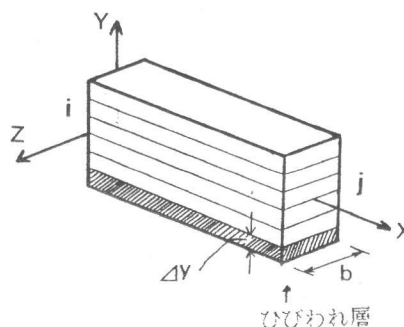


図-3 はり要素の座標系

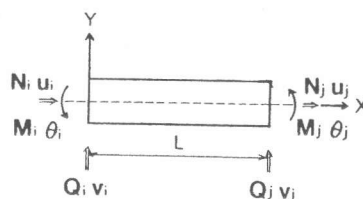


図-4 はり要素

図-3に示すように、はりの軸方向にX座標、高さ方向にY座標、XY面に垂直にZ座標を仮定する。はり要素のポテンシャルエネルギーの原理は $U_c$ をひずみエネルギー、 $V$ を外力によるポテンシャルエネルギーとすると次式のように表すことができる。

$$\Pi = U_c + V \quad (2)$$

$$U_c = \sum_{i=1}^n \int \int \int v_i (1/2) \sigma_x \varepsilon_x dx dy dz \quad (3)$$

ここで、 $n$ は要素の数、 $\sigma_x$ はX軸に垂直な面に作用する鉛直応力、 $\varepsilon_x$ はX方向のひずみである。外力ははり要素の節点のみに作用しているとすれば $V$ は図-4に示してある節点変位や外力を用いてつぎのように表すことができる。

$$V = \{U\}^t \{\bar{F}\} \quad (4)$$

$$\{U\}^t = \{u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \cdots u_m \quad v_m \quad \theta_m\}$$

$$\{\bar{F}\}^t = \{\bar{N}_1 \quad \bar{Q}_1 \quad \bar{M}_1 \cdots \bar{N}_m \quad \bar{Q}_m \quad \bar{M}_m\}$$

ここで、 $m$ は節点数である。平面保持の仮定をすれば、 $\varepsilon_x$ はつぎのように表される。

$$\varepsilon_x = \partial u / \partial x + \partial^2 v / \partial y^2 \cdot y \quad (5)$$

ここで、 $u$ 、 $v$ はそれぞれX方向とY方向の変位である。式(5)を式(3)に代入すると、ひずみエネルギーは1個の要素については次のように表される。

$$U_e = (1/2) \int \int \int v E (\partial u / \partial x + \partial^2 v / \partial y^2 \cdot y)^2 dx dy dz \quad (6)$$

式(6)の変位 $u$ 、 $v$ は次式のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u &= (1-x/L) u_i + (x/L) u_j \\ v &= (1-3x^2/L^2+2x^3/L^3) v_i + (x-2x^2/L+x^3/L^2) \theta_i \\ &\quad + (3x^2/L^2-2x^3/L^3) v_j + (-x^2/L+x^3/L^2) \theta_j \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式(7)を式(6)に代入し節点変位で微分すれば弾塑性剛性行列を得ることができる。本研究では図-3に示すようにひびわれ層を考慮しているので、弾塑性剛性行列の中の各係数の積分は層ごとに計算を行う。はり要素の弾塑性剛性行列 $[K_{ep}]$ を具体的に示すと次のようになる。

$$\begin{aligned} [K_{ep}] \text{ の } i \text{ 行 } j \text{ 列の係数を } k_{ij} \text{ とすると } & k_{11} = E_a/L, \quad k_{12} = 0, \quad k_{13} = -E_b/L, \\ & k_{14} = -E_a/L, \quad k_{15} = 0, \quad k_{16} = E_b/L, \quad k_{22} = 12E_c/L^3, \quad k_{23} = -6E_c/L^2 \\ & k_{24} = 0, \quad k_{25} = -12E_c/L^3, \quad k_{26} = -6E_c/L^2, \quad k_{33} = 4E_c/L, \quad k_{34} = E_b/L, \\ & k_{35} = 6E_c/L^2, \quad k_{36} = 2E_c/L, \quad k_{44} = E_a/L, \quad k_{45} = 0, \quad k_{46} = -E_b/L, \\ & k_{55} = 12E_c/L^3, \quad k_{56} = 6E_c/L^2, \quad k_{66} = 4E_c/L \end{aligned}$$

なお、 $k_{ji} = k_{ij}$ 、 $L$ =要素の長さ、 $dA = dy dz$ 、 $E_a = \int E dA$ 、 $E_b = \int E y dA$

$E_c = \int E y^2 dA$  である。

$k_{ij}$ の係数の中に $E_a$ 、 $E_b$ 、 $E_c$ のようにヤング係数 $E$ の面積分があるが、これらを具体的に示せば、次のようになる、

$$E_a = b \sum_{j=1}^{\ell} E_j \Delta y, \quad E_b = b \sum_{j=1}^{\ell} E_j y_j \Delta y, \quad E_c = b \sum_{j=1}^{\ell} E_j y_j^2 \Delta y$$

ここで、 $b$  = はりの幅、 $\ell$  = 層数、はりの高さを $H$ とすると、 $\Delta y = H/\ell$ 、 $y_j = j$ 層の $y$ 座標である。 $E_j$ は次の値を用いる。

- 弾性状態  $E_j = E$  (コンクリートのヤング係数)
- 引張軟化  $E_j = C_1 E L / (E + C_1 L)$  (応力が引張軟化曲線の第1勾配の時)
- $E_j = C_2 E L / (E + C_2 L)$  (応力が引張軟化曲線の第2勾配の時)

部材の耐力やひびわれの進展を知るためには、増分法が用いられる。増分法では各増分段階で、ひびわれの生じている層では軟化則を満たすように解を求める必要がある。本研究では増分法の一つである山田の方法 ( $R_{min}$ 法とも云う) を用いて解析を行った。増分法のアルゴリズムは文献 [2] に詳しく示してある。

### 3. 数値計算例

#### 3.1 両側切欠きを有する棒の直接引張試験

Cornelissenらは両側切欠きを有する長方形断面の棒の引張力による静的および繰返し荷重試験を行い、引張軟化曲線に関する研究を行っている [3]。ここでは、Cornelissenの実験のシミュレーションをはり要素をもちいて行う。試験体は図-5に示すように、断面は幅が60mm、厚さが50mm、長さは250mmの長方形断面の棒である。棒の中央に幅5mm深さ5mmの切欠きが両側についている。コンクリートの材料特性は $E = 39270 \text{ N/mm}^2$ 、 $\nu = 0.2$ 、 $f_t = 3.2 \text{ N/mm}^2$ 、 $G_f = 103.1 \text{ N/m}$ である。引張軟化則は六郷らが提案した二直線モデル (図-1) を用いる。図-5のAからEはエクステンソメータである。要素分割は図-6に示すように5分割し、各要素は50層に分割している。境界条件は下端Aの変位を拘束し上端Bに引張力を加えた。この時、引張破壊が切欠き先端から進行させるために上端に微小な水平力 (引張力の1/1000) を加えた。解析結果は図-7に平均応力とエクステンソメータの伸びの関係で示してあるが、両者の一致は良好である。

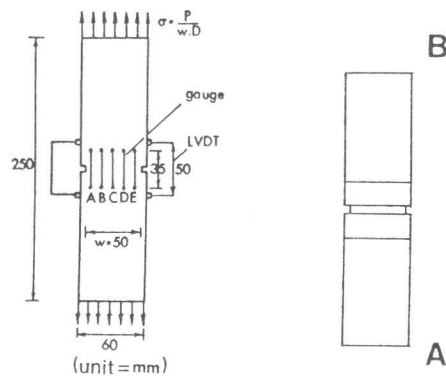


図-5 直接引張試験 図-6 要素分割

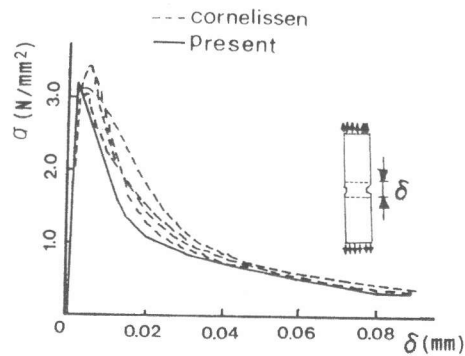


図-7 平均応力とエクステンソメータの伸びの関係

### 3.2 コンクリートはりの曲げ解析での最適な要素の長さについて

本研究で提案しているはり要素によって引張軟化解析をする方法は解析例3.1で示したようにひびわれ面の応力が比較的一様な場合はひびわれを含む要素の長さが短くても解の精度は良好である。しかし、曲げひびわれのようにひびわれ面で応力勾配が大きいときは、要素の長さが長くなるにつれて解が低めになる。三角形要素による解を正解としたときの、最適なはり要素の長さを求めるために、無筋コンクリートはりの破壊モーメントを三角形要素とはり要素で求めた。

三角形要素による破壊モーメントは、単純支持され中央に集中荷重を受ける無筋コンクリートはりの破壊解析から求めた。解析は対称性を利用して行った。この時の要素分割を図8に示す。はり要素による破壊モーメントは、図9に示すように対称2点荷重のはりから求めた。ただし、ひびわれははり中央のA点のみに生じるとする。はり要素で解析するときも対称性を利用して解析を行った、この時の要素分割は図9の右半分をもちいているが、その要素数は3である。同図で斜線を入れた要素はひびわれの発生する要素である。なお、はり要素は高さ方向(y軸)にも100層の分割を行っている。はり要素の最適な要素長さを求めるために、ひびわれの発生する要素長さ(L)は、はり高の1/20から2倍までの範囲で変化させた。

コンクリートの材料特性は $E = 30000 \text{ N/mm}^2$ 、 $f_t = 3.33 \text{ N/mm}^2$ 、 $G_f = 124 \text{ N/m}$ 、引張軟化曲線は図1の二直線モデルを用いた。はり高(H)とスパンの比は常に1.0であり、はり高は50mm、100mm、200mm、400mm、600mmの5ケース、はり幅はいずれも50mmである。解析結果は図10に示してあるが、図10で縦軸ははり要素による破壊モーメント $M_1$ と三角形要素による破壊モーメント $M_2$ の比、横軸は要素の長さとはりの高さの比である。なお、破壊モーメントは三角形要素では最大荷重\*スパン/4、はり要素では最大荷重\*スパン/6で求めた値である。

図10から云えることは、はり高さが50mmから400mmでは要素の長さをはり高さの1/2程度、はり高が600mmの時は要素の長さをはり高さの1/3程度に取れば良いことが分かる。この結果は一種類のコンクリートに対して得られた結論であるから、さらに広範囲の材料特性のもとで確認する必要がある。

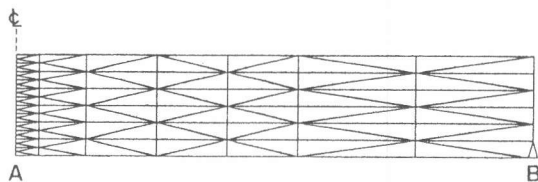


図-8 三角形要素による要素分割

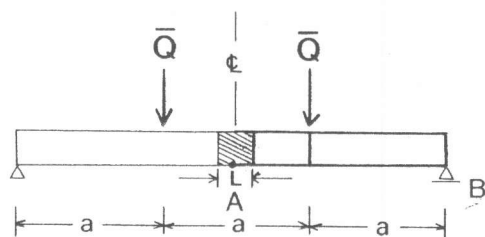


図-9 はり要素による曲げ強度解析

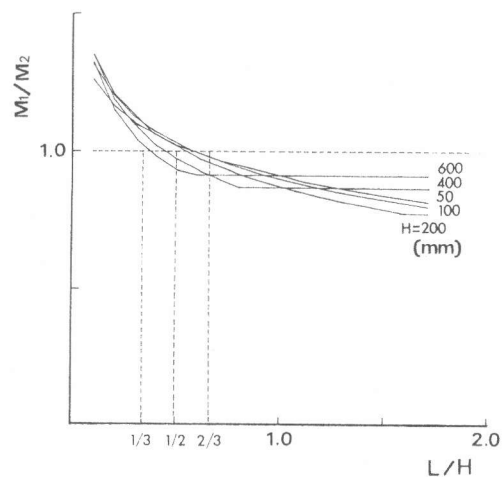


図-10 三角形要素とはり要素による破壊モーメントの比較

### 3.3 切欠きを有するコンクリートはりの曲げ強度解析

はり要素によるコンクリートはりの曲げ強度解析の例として、六郷らによる中央集中荷重が作用するはり（図-11）の実験結果〔4〕のシミュレーションを示す。切欠きを有するはりでは、切欠き部分と切欠きのない部分では中立軸の位置が違ふ。このために、切欠き部分はオフセットビーム要素〔5〕のように弾塑性剛性行列を変換する必要がある。中立軸のずれを $D_y$ とすると変換行列〔T〕はつぎのようになる。〔T〕の $i$ 行 $j$ 列の係数を $t_{ij}$ とすると対角成分 $t_{ii}$ はすべて1、 $t_{13} = t_{46} = D_y$ でこれらの係数以外はすべて零である。なお、〔T〕の大きさは $6 \times 6$ である。切欠き部の弾塑性剛性行列は〔T〕<sup>t</sup>〔K<sub>ep</sub>〕〔T〕となる。

はり要素による解析は六郷らの実験の内、断面が10cm×10cm長さ85cmの試験体と断面が15cm×15cm長さ113cmの試験体だけを解析した。これらの試験体の材料特性は  $E = 2000000 \text{ kgf/cm}^2$ 、 $f_t = 34 \text{ kgf/cm}^2$ 、 $G_f$ は0.211と0.234  $\text{kgf/cm}$ である。引張軟化曲線は図-1の二直線モデルをもちいた。

解析は対称性を利用しているので、要素分割は切欠き部とそれ以外の部分の2要素のみである。なお、ひびわれ要素の長さはいずれもはり高の1/2、層分割数は50である。

解析結果は荷重とスパン中央のたわみの関係で図-12に示してある。 $G_f = 0.234 \text{ kgf/cm}$ のはりの解析結果は実験値よりも少し高目となっている。

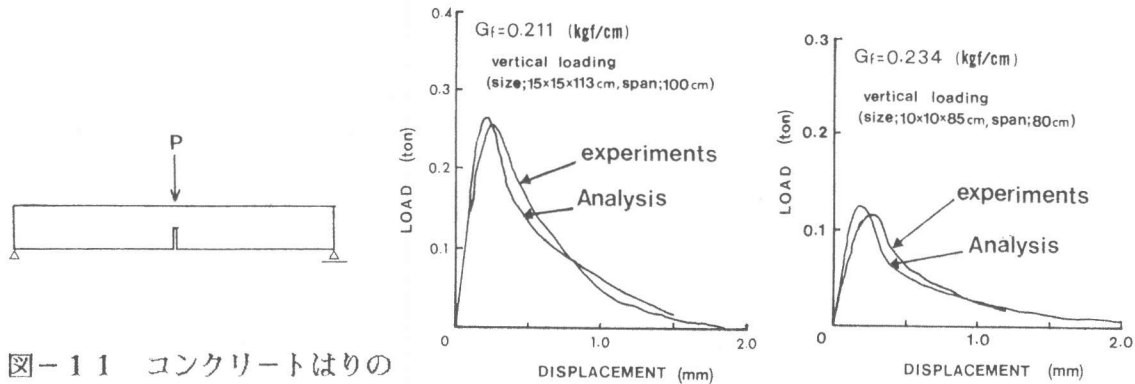


図-11 コンクリートはりの曲げ試験

図-12 荷重とスパン中央のたわみの関係

### 3.4 コンクリートの曲げ強度の寸法効果

コンクリートの曲げ強度は供試体の寸法の増加にともなって見かけの強度が低下するいわゆる寸法効果がある。加藤ら〔6〕は正方形断面のコンクリートはりを用いて、曲げ強度の寸法効果について実験および平面三角形要素による解析的な研究を行い、曲げ強度の推定式を提案している。

$$f_r / f_t = 1 + 1 / (0.85 + 4.5 (h / l_{ch}))$$

ここで、 $f_r$  = 曲げ強度、 $h$  = 供試体の高さ、 $l_{ch} = E G_f / f_t^2$ である。

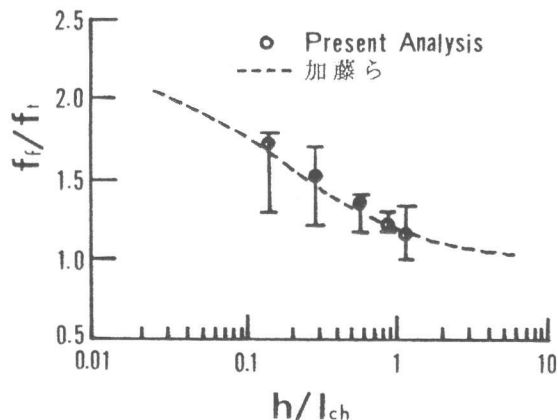


図-13 曲げ強度の寸法効果

本研究で示しているはり要素を用いて加藤らの提案した曲げ強度の推定式および実験結果との比較を行う。実験に用いているコンクリートの材料特性は $E = 280000 \text{ kg f / cm}^2$ 、 $f_t = 28.5 \text{ kg f / cm}^2$ 、圧縮強度は $336 \text{ kg f / cm}^2$ である。解析では、 $G_f = 0.10 \text{ kg f / cm}$ と仮定している。供試体の高さ $h$ は $5 \text{ cm}$ 、 $10 \text{ cm}$ 、 $20 \text{ cm}$ 、 $30 \text{ cm}$ 、 $40 \text{ cm}$ の5種類である。載荷方法は図-9に示すような対称2点載荷である。はり要素による解析を行うときの要素分割は、対称性を利用し図-9の右半分をもちいている。びびわれ要素の長さはいずれもはり高の $1/2$ 、層分割数は $100$ である。

図-13には、加藤らの提案した曲げ強度の推定式および実験結果の範囲を示している。同図にははり要素による解も示しているが、加藤らの推定式および実験結果との一致は良好である。

#### 4. まとめ

本研究では、はり要素を用いてコンクリートの引張軟化を考慮した解析を行う方法を示した。得られた結論を述べると次のようになる。

- 1) はり要素を用いて切欠きを有するコンクリートはりの曲げ強度解析に適用したところ、実験と良好に一致した。
- 2) コンクリートの曲げ強度の寸法効果の解析では、はり要素による解は加藤らの推定式および実験結果と良く一致した。これらの結果は解析方法の妥当性を示している。
- 3) はり要素で曲げ破壊の解析を行うときは、計算例3.3および3.4で示したようにわずか2または3個の要素で十分である。これは、三角形要素を用いた解析に比べ、入力データの作成や計算コストの面で大きな利点である。

謝辞 本報告をまとめるに当たり、本学科4年次の宮城盛光君、波平伸君のご助力をいただきました。ここに、感謝の意を表します。

#### 参考文献

- [1] コンクリートの破壊力学研究委員会：コンクリート構造の破壊力学に関するコロキウム、日本コンクリート工学協会、1990.3
- [2] 伊良波繁雄：ハイブリッドストレスモデルによるコンクリートの引張軟化解析、コンクリート工学年次論文報告集、Vol2、No2、pp.753-758、1990.6
- [3] Cornelissen.H.A.W, Hordijk.D.A, Reinhardt.H.W: Experiments and Theory for the Application of Fracture Mechanics to Normal and Lightweight Concrete, Fracture Toughness and Fracture Energy of Concrete, edited by F.H. Wittmann, Elsevier, pp565-575, 1986
- [4] Rokugo.K, Iwasa.M, Suzuki.T, Koyanagi.W: Testing Methods to Determine Tensile Softening Curve and Fracture Energy of Concrete, International Workshop on "Fracture Toughness and Fracture Energy Test for Concrete and Rock", pp.128-138, oct, 1988, Sendai
- [5] 川井忠彦、三本木茂夫：薄板構造解析、培風館、pp48
- [6] 加藤英徳、内田裕市、六郷恵哲、小柳治：コンクリートの曲げ強度の寸法効果に関する破壊力学的研究、土木学会第46回年次学術講演会概要集、第5部、pp684-685、1991.9