

[2001] はり要素によるコンクリートの破壊解析

伊良波繁雄\*1和仁屋晴謹\*2具志幸昌\*3

1. はじめに

有限要素法でコンクリートのひびわれを解析する際、平面要素を用いて引張軟化の解析を行う方法は厳密であるが、計算コストがかかるという問題点がある。はり部材が曲げや軸力を受ける場合は、平面要素の代わりにトラス要素やはり要素のような一元要素を用いることができれば、計算コストや入力データの作成の大きな軽減になる。このために、筆者らはトラス要素やはり要素のような一次元要素を用いて、コンクリートの引張軟化を考慮した解析方法を提案した [1], [2]。解析例として切欠きを有するコンクリートはりの直接引張試験、コンクリートはりの曲げ試験のように、無筋コンクリートはりの破壊解析に適用した結果、実験値との一致は良好であった。本論文は提案した解析方法を急激に破壊する低鉄筋比コンクリートはり、引張破壊と圧縮域での応力-ひずみ曲線の非線形を考慮しなければならない鋼繊維補強コンクリート部材の曲げ破壊解析にも適用範囲を広げることが目的である。

2. はり要素の弾塑性剛性行列

弾塑性剛性方程式の導き方は文献 [2] に詳しく述べているので、ここでは簡単に説明する。本研究では、はり要素の弾塑性剛性行列を導くのに、鉄筋コンクリートの分野でよく用いられている方法、すなわち、一本のはりを高さ方向に分割して計算する方法を用いた。図-2に示すように、はりの軸方向にx座標、高さ方向にy座標、x-y面に垂直にz座標を仮定する。はり要素のポテンシャルエネルギーの原理は  $U_c$  をひずみエネルギー、 $V$  を外力によるポテンシャルエネルギーとすると次式のように表すことができる。

$$\Pi = U_c + V \quad (1)$$

$$U_c = \sum_{i=1}^n \iiint_{V_i} \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dx dy dz \quad (2)$$

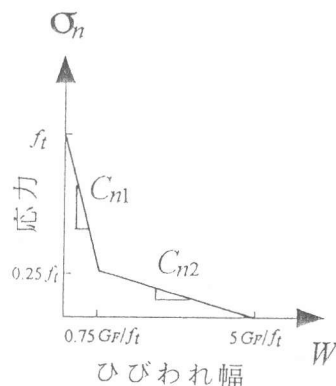


図-1 引張軟化曲線

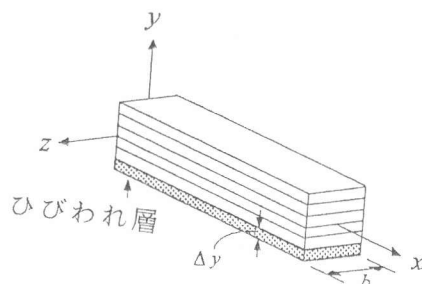


図-2 はり要素の座標系

\*1 琉球大学助手 工学部環境建設工学科, 工博 (正会員)  
 \*2 琉球大学助教授 工学部環境建設工学科 (正会員)  
 \*3 琉球大学教授 工学部環境建設工学科, 工博 (正会員)

ここで、 $n$  は要素の数、 $\sigma_x$  は  $x$  軸に垂直な面に作用する鉛直応力、 $\epsilon_x$  は  $x$  方向のひずみである。平面保持の仮定をすれば、 $\epsilon_x$  は次のように表される。

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} y \quad (3)$$

ここで、 $u$ 、 $v$  はそれぞれ  $x$  方向と  $y$  方向の変位である。式(3)を式(2)に代入すると、ひずみエネルギーは1個の要素については次のように表される。

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_V E \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} y \right)^2 dx dy dz \quad (4)$$

弾塑性剛性行列は式(4)の変位  $u$ 、 $v$  を、はり要素で良く用いられるように、 $u$  は一次式、 $v$  は三次式を仮定し、式(4)を微分することで得ることができる[2]。弾塑性剛性行列の  $i$  行  $j$  列を  $k_{ij}$  とすると

$$\begin{aligned} k_{11} &= E_a/L, \quad k_{12} = 0, \quad k_{13} = -E_b/L, \quad k_{14} = -E_a/L, \quad k_{15} = 0 \\ k_{16} &= E_b/L, \quad k_{22} = 12E_c/L^3, \quad k_{23} = 6E_cL^2, \quad k_{24} = 0, \quad k_{25} = -12E_c/L^3 \\ k_{26} &= 6E_cL^2, \quad k_{33} = 4E_cL, \quad k_{34} = E_b/L, \quad k_{35} = -6E_c/L^2, \quad k_{36} = 2E_c/L \\ k_{44} &= E_a/L, \quad k_{45} = 0, \quad k_{46} = -E_b/L, \quad k_{55} = 12E_c/L^3, \quad k_{56} = -6E_c/L^2 \\ k_{66} &= 4E_c/L \end{aligned}$$

となる[2]。なお、剛性行列は対称行列であるので  $k_{ji} = k_{ij}$ 、 $L$  = 要素の長さ、

$$dA = dy dz, \quad E_a = \int_A E dA, \quad E_b = \int_A E y dA, \quad E_c = \int_A E y^2 dA$$

である。

$k_{ij}$  の係数の中に  $E_a, E_b, E_c$  のようにヤング係数  $E$  の断面積分があるが、本研究では図-2に示すように、コンクリートをはりを高さ方向に分割して、層ごとに、圧縮応力による塑性、引張応力による軟化を考慮する。鉄筋は鉄筋の図心に最も近い層に集中して配置し、その配置された層で降伏やひずみ硬化等を考慮する。このために、 $E_a, E_b, E_c$  は次式のように数値積分に直して計算する。これらを具体的に示せば次のようになる。

$$E_a = b \sum_{j=1}^l E_j \Delta y, \quad E_b = b \sum_{j=1}^l E_j y_j \Delta y, \quad E_c = b \sum_{j=1}^l E_j y_j^2 \Delta y \quad (5)$$

ここで、 $b$  = はりの幅、 $l$  = 層数、 $H$  = はりの高さ、 $\Delta y = H/l$ 、 $y_j = j$  層の  $y$  座標、 $E_j = j$  層のヤング係数である。

式(5)の  $E_j$  は分割された層のヤング係数で、これは破壊が進行するにつれて変化することになるので、コンクリートに対しては次の値を用いた。

弾性状態  $E_j = E$  (コンクリートのヤング係数)  
 引張破壊  $E_j = C_{n1} E L / (E + C_{n1} L)$  (応力が引張軟化曲線の第1勾配( $C_{n1}$ )の時)  
 $E_j = C_{n2} E L / (E + C_{n2} L)$  (応力が引張軟化曲線の第2勾配( $C_{n2}$ )の時)  
 圧縮破壊  $E_j = E_{c1}, E_{c2}, E_{c3}$  (図-3に示すような接線勾配)

鉄筋に対してはひずみ硬化を考慮し、次の値を用いた。

圧縮、引張破壊  $E_j = E_{s1}, E_{s2}, E_{s3}$  (図-4に示すような接線勾配)

解析では鉄筋コンクリートはりを、単純に、鉄筋層とコンクリート層で層状に分割し、鉄筋とコンクリートの付着は完全付着を仮定する。なお、計算に用いた増分法は山田の方法( $R_{min}$ とも云われる)である[1]。

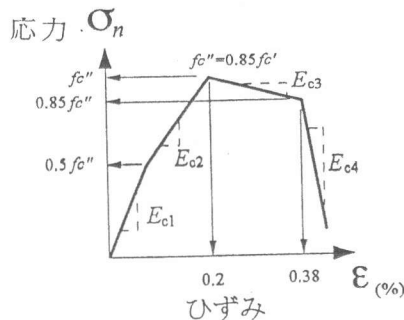


図-3 コンクリートの応力-ひずみ曲線

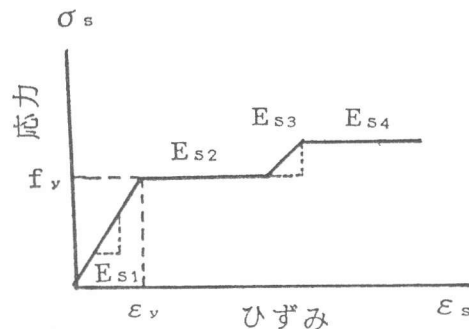


図-4 鉄筋の応力-ひずみ曲線

### 3. 数値解析例

#### 3.1 低鉄筋比はりの曲げ破壊解析

近年、構造物の大型化に伴い、鉄筋コンクリート部材断面もますます大きくなっている。このため、曲げモーメントの小さい部分では必要とされる軸方向引張鉄筋がきわめて小さくなる場合がある。しかし、引張鉄筋を極端に小さくすると破壊が脆性的なものとなる。

島ら[5]は、鉄筋比が0.050-0.20%という低鉄筋比のはりを製作して、それらの破壊挙動を詳細に観察し、引張鉄筋の最小量について実験的に考察を行っている。ここでは、引張軟化を考慮したはり要素を用いて、島らの実験結果を解析し、解析結果と実験を比較検討する。島らの実験に用いられた供試体の鉄筋比、配筋およびコンクリート強度を表-1、はりの諸元を表-2、使用した鉄筋の特性を表-3に示す。

表-1 供試体の鉄筋比、配筋、コンクリート強度

供試体番号	鉄筋比 P (%)	配筋	コンクリート強度 $f'_c$ (MPa)
1	0.05	1D10	24.5
2	0.10	2D10	31.4
3	0.10	2D10	20.1
4	0.15	3D10	20.1
5	0.20	1D19	20.1

表-2 供試体の諸元

全長 (cm)	スパン長 (cm)	はり高 H (cm)	有効高さ d (cm)	はり幅 b (cm)
240	220	60	56	25

数値解析は対称性を利用して図-5に示すように、はりの右半分だけを用いて解析した。要素分割は同図に示すように、はりの長手方向に3分割し、はり高方向の層分割数を100とした。なお、ひびわれ要素の長さのはり高の1/3とした。コンクリートの引張軟化曲線を六郷らが提案した二直線モデル、コンクリートの圧縮領域での応力-ひずみ曲線を図-3、鉄筋の応力-ひずみ曲線は図-4のようにひずみ硬化を仮定する。また、破壊エネルギー $G_f$ は三橋らの実験[4]を参考に $G_f = 120\text{N/m}$ と $160\text{N/m}$ の2ケースについて解析した。解析結果は表-4に曲げひびわれ発生荷重、鉄筋の降伏荷重、最大荷重について、はり要素を用いた解析値と島らの実験結果および島らの計算値の比較を示した。

表-4の曲げひびわれ発生荷重で、供試体の番号1と2については、両者の計算値に優劣はつけがたいが、供試体番号3, 4, 5では、明らかにはり要素の値が精度は高い。はり理論解は $\pm 10\%$ の誤差で実験値を算定することができる。鉄筋の降伏荷重は実験では4と5番の供試体だけで求められているが、はり要素の解析値と実験との一致は良好である。供試体1, 2, 3の最大荷重については、はり要素による解と島らの計算値は近い値を示しているが、実験値はそれよりも少し高い値を示している。供試体4の場合は、はり要素による解が実験値と一致し島らの計算値は少し低めとなった。いずれの解析方法も実験値より $\pm 10\%$ 以上の誤差がある。

はりのたわみと荷重の関係の解析例を図-6に示した。今回

表-3 鉄筋の特性

呼び径	ヤング係数 $E_s$ (GPa)	降伏点 $f_y$ (MPa)	引張強さ $f_u$ (MPa)	ひずみ硬化開始ひずみ $\epsilon_{sh}$
D10	200	379	566	0.016
D19	200	358	545	0.016

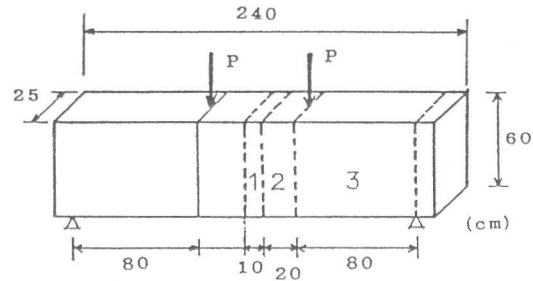


図-5 鉄筋コンクリートの曲げ試験

表-4 曲げひびわれ発生荷重、降伏荷重および最大荷重

供試体番号	$G_f$	曲げひびわれ発生荷重(KN)			降伏荷重(KN)		最大荷重(KN)		
		はり理論	実験(島)	計算(島)	はり理論	実験(島)	はり理論	実験(島)	計算(島)
1	120	110	114	107	49	--	55	60	56
	160	118			57		55		
2	120	125	120	126	83	--	110	122	112
	160	133			90		110		
3	120	103	110	93	85	--	110	130	108
	160	110			94		110		
4	120	105	113	93	120	116	163	163	150
	160	113			128		163		
5	120	108	113	93	149	147	195	--	184
	160	116			157		195		

( )の中は実験値/計算値

の解析では、単純に、鉄筋とコンクリートの完全付着を仮定し、コンクリートのひびわれや応力-ひずみ関係の非線形性、鉄筋の降伏等の非線形現象は全て、はり中央のひびわれ要素に集中させているため、解析で得られる、はりのたわみと荷重の関係も精度の低いものとなっている。

### 3.2 JCI 共通解析

1993年JCIで「コンクリート構造の破壊に関する共通解析および実験」が実施され、解析モデルや解析手法の比較が行われた[3]。ここでは、共通解析の「無筋コンクリートはりの曲げ破壊の解析」の内、普通コンクリートはりとはり鋼繊維補強コンクリートはりから各々一体づつ解析した結果を示す。解析は対称性を利用して図-7に示すように要素分割し、はり高方向には100層の分割を行った。普通コンクリートを解析する時は、引張軟化曲線として図-1の二直線モデルを使用し、鋼繊維補強コンクリートはりの解析では、図-8に示すように多直線モデルの引張軟化曲線を二直線モデルで近似し引張強度の1/4、1/5に折り曲がり点がある簡略化した引張軟化曲線を用いた。

解析した試験体の内、図-9に#2の普通コンクリートはり ( $h = 200 \text{ mm}$ ) の荷重-変位曲線および最大荷重前後のひびわれ図、図-10に#4の鋼繊維補強コンクリートはり ( $h = 100 \text{ mm}$ ) の荷重-変位曲線および最大荷重前後のひびわれ図を示した。図-9の荷重-変位曲線を見ると、本解析結果は内田らの平面要素を用いた解析結果や実験結果との一致は良好である。図-10の鋼繊維補強コンクリートはりの解析においては、共通解析で与えられた多直線モデルを1/5モデルで近似する方が1/4モデルよりも、内田らの平面要素による解に近い値が得られた。しかし、内田らの実験値と比べると、実験値がばらついていることもあり、両者の優劣はつけられない。ひびわれ図を見ると、鋼繊維補強コンクリートはりの場合は、はり中央の上部に圧縮応力による塑性域が見られる。

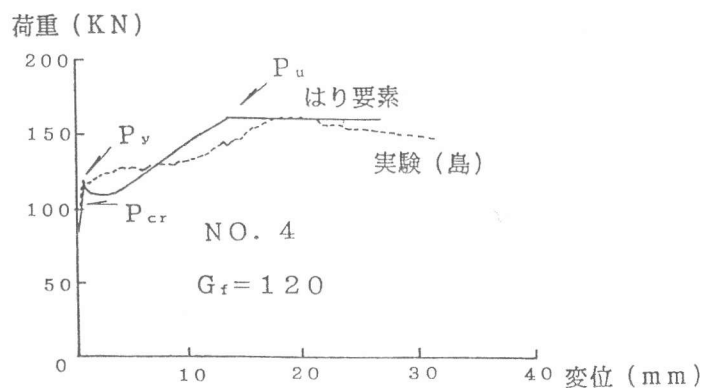
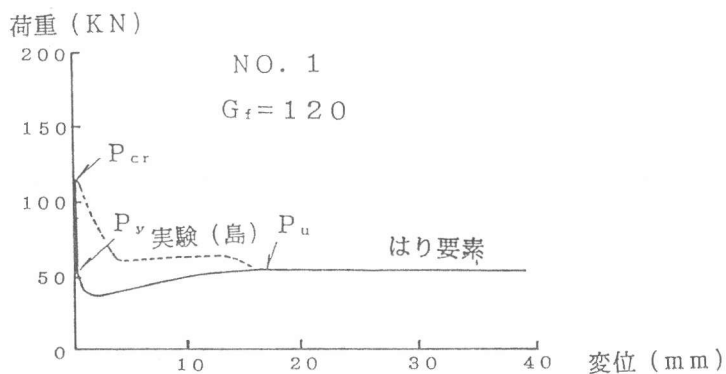


図-6 荷重-変位の関係

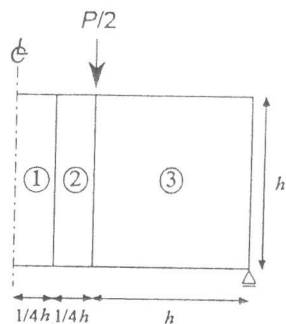


図-7 要素分割

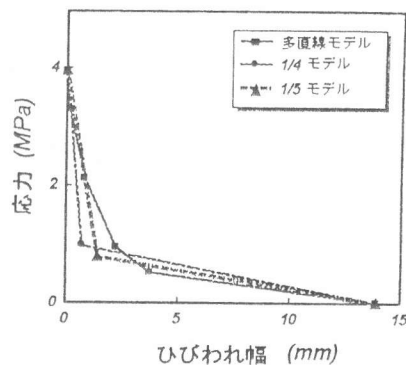


図-8 引張軟化曲線  
(鋼繊維コンクリート)

#### 4. まとめ

本論文では、はり要素を用いてコンクリートの引張軟化、圧縮域での応力-ひずみ曲線の非線形、鉄筋のひずみ硬化を考慮した解析方法を示した。解析の適用例としては低鉄筋比コンクリートはり、「コンクリート構造の破壊に関する共通解析および実験」における試験体の破壊解析を示したが、いずれも良好な結果を得た。はり要素で曲げ破壊の解析を行うときは、適用例から分かるように、いずれの解析でも3個の要素を用いて行われており、平面要素を用いた解析に比べ、入力データの作成や計算コストの点で大きな利点がある。

謝辞 本報告をまとめるに当たり、ご助力をいただいた波平伸君（ホープ設計）に心から感謝の意を表します。

#### 参考文献

- [1] 伊良波繁雄：ハイブリッドストレスモデルによるコンクリートの引張軟化解析，コンクリート工学年次論文報告集，Vol.12，No.2，pp.753-758，1990.6
- [2] 伊良波繁雄：はり要素による引張軟化の解析的研究，コンクリート工学年次論文報告集，Vol.14，No.2，pp.897-902，1992.6
- [3] 破壊力学の応用研究委員会報告書：日本コンクリート工学協会，1993.10
- [4] Mihashi, H., Wittmann, F. H., Simonin, P., Rokugo, K.: Fracture Energy Evaluation of Concrete with Compact Tension Test, コンクリート工学年次論文報告集，Vol.9，No.2，pp.657-662，1987
- [5] 島 弘，二羽淳一郎，岡村甫：曲げを受ける低鉄筋比はりにおける脆性破壊の防止に関する検討，土木学会論文集，第378号，V-6，pp.231-237，1987.2

- ：引張軟化曲線の第一勾配( $C_{n1}$ )に達した層
- ：引張軟化曲線の第二勾配( $C_{n2}$ )に達した層
- ▨：圧縮側接線勾配 $E_{c2}$ に達した層
- ▩：圧縮側接線勾配 $E_{c3}$ に達した層
- ▧：圧縮側接線勾配 $E_{c4}$ に達した層

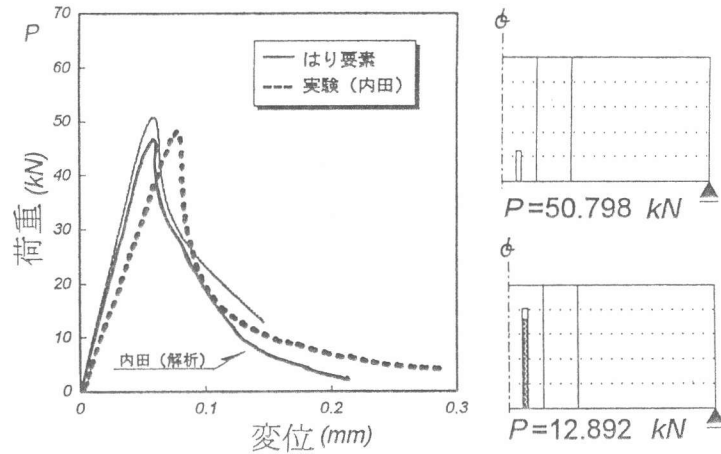


図-9 試験体#2の解析結果  
(荷重-変位曲線およびびびわれ)

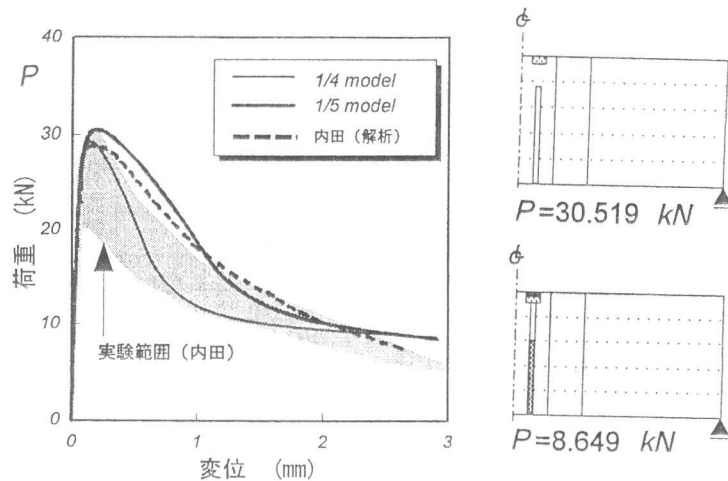


図-10 試験体#4の解析結果  
(荷重-変位曲線およびびびわれ図)