

論文 弾性連続体上（平面ひずみ）のフーチングの沈下と回転による 応力と変形の算定に関する考察

永井興史郎*

要旨：半平面弾性体(*semi-infinite region*)の境界面上に垂直合力とモーメントが作用した剛版(*stamp*)が置かれた場合の弾性体表面と内部の変位・応力の算定法を示した。その手法は、半平面弾性体における垂直等分布荷重の変位の解を用い、合力とモーメントが作用した剛版載荷(摩擦なし)の応力解の分布に沿って数値積分するものである。厳密解は級数で表現されると考えられるのでこの手法は簡便でありながらそれと同等の厳密さを持つものと考えられる。

キーワード：剛版載荷、半平面弾性体、フーチング、相互作用、応力と変位

1. はじめに

現在ではマトリクス剛性法（変位法）が実務の骨組解析においても普及し、地盤に有限要素法あるいは境界要素法を適用した解析もそれほど困難ではないが、実際には余り用いられず、基礎は沈下しないとした解析が大半である。また、接地圧・不同沈下問題の解析においても、*winkler*ばねを仮定した解析が行なわれている。これは、骨組の行列と地盤の行列が異種であること、大きな骨組においては、上部構造の節点数がかなり大きく、さらにそれと余り変わらないか、あるいはもっと大きな節点数をもつ地盤を解析に加えても煩雑さが増す割りには得られるものが少ないと考えられているためであろう。

筆者[1]は既に、*sub-structure*法と同様に、上部骨組と基礎地盤を別にして二段階の解析を行ない、実務でよく行われている基礎固定とした骨組の解析と地盤の解析を結び付ける方法について述べている。その手法は、より基礎的な、弾性連続体と仮定した地盤の解析手法とマトリクス剛性法による剛なフーチングを持つ骨組み解析法の結合を目指したものであり、骨組と地盤を結合する解法としては厳密である。しかし、フーチングの軸力とモーメントを考慮し、フーチング下の変位を剛版の変位とするために等分布荷重の解を組み合わせて近似的に表現していた。その後の検討により、この等分布荷重の変位の解を用いる方法を発展させて、剛版載荷時の応力と変位が数値解析上の誤差を別とすれば、原理的には厳密に表現できることが分かった。本報告はその理論と数値解析例について述べる。

2. 半平面弾性版境界上の剛版の並進・回転時の接触応力の解

М у с х е л и ш и л и, Н. И. (*Muskhelishvili, N. I.* ムスフェリシヴィリ)(1933)[2]は複素関数論を駆使して二次元弾性論における一般性のある解法を示した。その中に半平面弾性版(*semi-infinite region*)境界上の剛版(*stamp*)の並進・回転時の接触応力の解も示されている。

境界と剛版の間の摩擦を無視した場合の解は次式で与えられる。

$$\sigma(t) = \frac{N - 2Mt / \ell^2}{\pi \sqrt{\ell^2 - t^2}} \quad (1)$$

* 摂南大学工学部建築学科 教授 工博(正会員)

ただし、 $\sigma(t)$:接触応力、 N :軸力、 M :モーメント、 ℓ :フーチング半幅、 t :フーチング横座標(後述図-1参照)とする。

曲げモーメントと剛版の回転角 θ の関係は次式で与えられる。

$$M = -\int_{-\ell}^{\ell} t\sigma(t)dt = \frac{\pi G\ell^2}{2(1-\nu)}\theta \quad (2)$$

ただし、 G :剪断弾性係数、 ν :ポアソン比とする。

図-1はフーチング底面($y=0$)下の応力分布を示している。水平・鉛直座標を x, y として点 $z = x+iy$ での x, y 方向変位 u, v は次式を x について積分することによって得られる。

$$2G(u'+iv') = (3-4\nu)\phi(z) + \phi(\bar{z}) - (z-\bar{z})\bar{\phi}'(\bar{z}) \quad (3)$$

ただし、 i は虚数単位とし、

$$u' = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v' = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\phi(z) = -\frac{G}{2(1-\nu)}\left(\frac{z}{\sqrt{\ell^2-z^2}} - i\right)\theta + \frac{N}{2\pi\sqrt{\ell^2-z^2}}$$

しかし、その結果得られる解は級数表現となるものと考えられる。そこで、本論においては次節のような工夫をした。

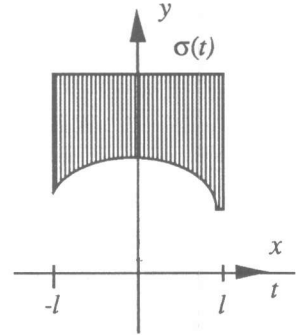


図-1 フーチング底面の応力

3. 微小区間の等分布荷重による変位の解の重ね合わせ

同じく、図-1の座標による半平面弾性体の境界上の等分布荷重 q_0 による x, y 方向の変位の解 U, V は次式で与えられる[1],[3]。

$$U(x, y, \ell) = \frac{-q_0}{\pi E} \left[-y \ln\{(x+\ell)^2 + y^2\} + y \ln\{(x-\ell)^2 + y^2\} - (1-\nu) \left\{ (x+\ell) \arctan \frac{x+\ell}{-y} - (x-\ell) \arctan \frac{x-\ell}{-y} \right\} \right] \quad (4)$$

$$V(x, y, \ell) = \frac{-q_0}{\pi E} \left[(x+\ell) \ln\{(x+\ell)^2 + y^2\} - (x-\ell) \ln\{(x-\ell)^2 + y^2\} - (1-\nu)y \left(\arctan \frac{x+\ell}{-y} - \arctan \frac{x-\ell}{-y} \right) \right] \quad (5)$$

ただし、 E :ヤング係数とする。

そこで、 $x=0, y=0$ における y 方向の変位 V_c は

$$V_c = -\frac{4q_0}{\pi E} \ell \ln \ell \quad (6)$$

となる。また、 ℓ を無限小とした極限を考えると V_c は0に限りなく近づく。よって、文献[3]に述べられているごとく、上記等分布荷重の載荷幅を無限小区間とした時、その直下への寄与

semi infinite
plane strain
105.00 kg/cm²(shear m.)
0.43 (poisson)

-40.00 kg
0.00 kg.cm

disp. 1cm
strs 1kg/cm²

1 mesh 1mx1m

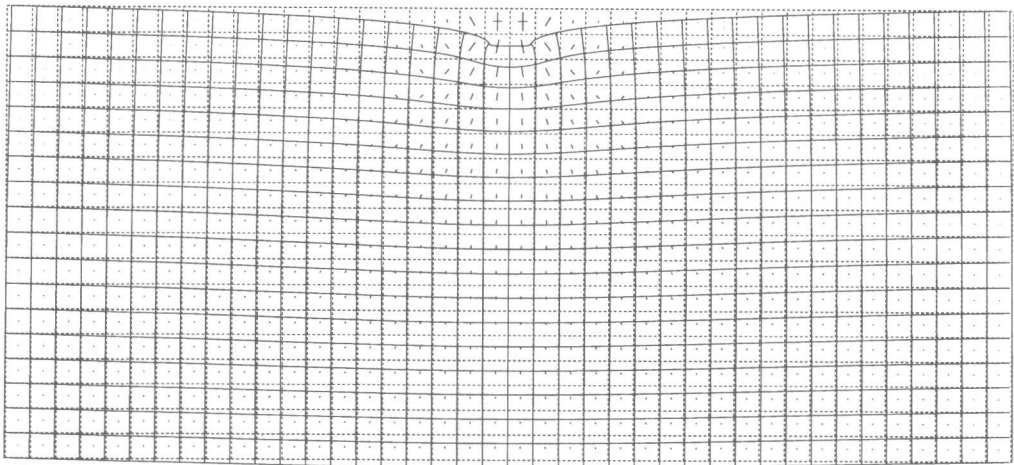


図-2 偏芯のない場合の半平面の応力と変位

semi infinite
plane strain
105.00 kg/cm²(shear m.)
0.43 (poisson)

-40.00 kg
-1000.00 kg.cm

disp. 1cm
strs 1kg/cm²

1 mesh 1mx1m

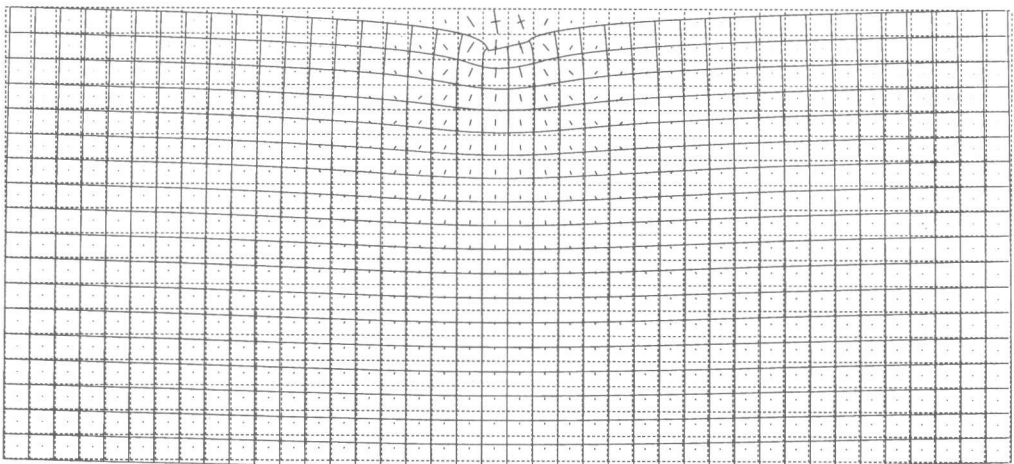


図-3 偏芯のある場合の半平面の応力と変位

は無視できることとなり、特異点とはならないことが分かる。そこで剛版載荷時の変位等は次式のような積分によって計算されることとなる。

$$u(x,y) = \int_{-l}^l \frac{\sigma(\xi)}{q_0} U(x-\xi, y, d\xi) \quad v(x,y) = \int_{-l}^l \frac{\sigma(\xi)}{q_0} V(x-\xi, y, d\xi) \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_{-l}^l \frac{\sigma(\xi)}{q_0} \frac{\partial U(x-\xi, y, d\xi)}{\partial x} \quad \text{etc.} \quad (8)$$

ただし、上式中の $\sigma(\xi)$ は式(1)で与えられている。

4. 数値積分の結果

この積分の結果は式(3)の積分の結果と一致しなければならない。ここではその検証の準備も兼ねて、上式の積分を数値積分(載荷部を20等分)として実行した結果を図-2,3に示す。地盤の剪断弾性係数 $G=105\text{kg/cm}^2$ 、ポアソン比 $\nu=0.43$ である。図-2は40kgの荷重が対称で剛なフーチングの中心に作用した場合を示している。図-3は同じ荷重が0.25m偏芯した場合である。いずれも1mおきの変位と主応力が示されている。変位と応力の縮尺は同図の右上に示した。境界の少し上には応力境界条件がどの程度満たされているか(精度)を示すために境界上の変位分布からの表面応力の算定値を示したが、載荷部分でのみ表面応力が見られ(右側の分布は式(1)の正解分布)、同一線上の他の部分では表面応力が表示されず(ほぼ0)、境界条件がよく満たされていることが分かる。なお、解析はすべて8byte実数(倍精度)で行なっている[4]。

実際の地盤では塑性化のためこの解析結果の様な応力集中は生じ得ない。本論の目的は一体解析の弾性論的に厳密な手法の確立である。弾塑性論による手法においてはこの応力集中の部分から塑性化を考慮することが出来る。

まとめ

平面ひずみ弾性地盤に限定してはいるが、骨組みと地盤の連成解析手法において未解決であった剛体載荷の変位を検討し、地盤の即時沈下とフーチングの反力モーメントにより、建物に付加される応力を評価するための手法をほぼ解決した。

分布荷重による変位の厳密解を用いて、解析を容易にすると同時に、精度を高めた。ただし、地盤とフーチングの間の摩擦は考慮していない。初等関数による摩擦を考慮した応力の解は文献[2]に示されているが、数値積分が複雑になると考えられるので今後の課題としたい。

誤差の考察がまだ不十分である。半無限(三次元)地盤に対しても本報告で検討したことは基本となるが、また別の検討が必要である。

文献)

[1]永井興史郎：代用荷重による平面骨組(直接基礎)-弾性地盤系の静的解析手法、構造工学論文集Vol.40B,1994.3

[2] М у с х е л и ш и л и, Н. И. (Muskhelishvili, N.I.) (4th ed., Dec. 1953, (1st. ed., Sp. 1933)): Some basic problems of the mathematical theory of elasticity -Fundamental equations plane theory of elasticity torsion and bending- (translated by J. R. M. Radok) Nordhoff International Publishing Leyden 2nd ed. pp.486 ~510, 1962

[3]S.P.Timoshenko & J.N.Goodier:Theory of Elasticity, MacGraw-hill (3rd.ed.) pp.97-109

[4]宇土顕彦：FORTRANによる計算機プログラミング速習 コロナ社,1989 p.11