

論文 Drucker-Prager モデルの NONLOCAL 化

山本 博稔*1・Supratic Gupta*2・田辺 忠顕*3

要旨：今日まで、様々な NONLOCAL 化の概念が提案されてきた。しかし未だ増分形式の FEM 解析法においては、NONLOCAL 化の一般的手法は十分に開発されているとはいえない。そこで我々は、代表的に Drucker-Prager モデルを取り上げ、増分形式において NONLOCAL 化を行う手法を検討した。その際に、局所化による等価破壊エネルギーが要素分割に拘わらず一定になるという仮定を用いて定式化を行い、NONLOCAL 化されていない従来の解析法と NONLOCAL 化を行った解析法との比較を行い、その妥当性を示した。

キーワード：NONLOCAL 化、増分形式、Drucker-Prager モデル

1. はじめに

構造解析のための有限要素解析においてひずみ軟化領域があると、メッシュの切り方によって計算値が大きく異なるメッシュ依存性が発生する。従って解析に一般性を持たせるためには、メッシュ依存性をなくす（これを以下 NONLOCAL 化と呼ぶ。）必要がある。全応力-ひずみ法における NONLOCAL 化の方法は Z. P. Bazant 等によって研究されてきているが、増分形式における NONLOCAL 化の手法は十分に研究がなされていないように見受けられる。

そこで本研究では Drucker-Prager モデルを代表に取り上げ、等価塑性破壊エネルギーが要素分割に拘わらず一定になるように定式化を行い、荷重-変位関係が要素分割に拘わらずほぼ等しい曲線を描くという意味での NONLOCAL 化が数値解析において達成していることを確認してこの定式化の妥当性を示す。

2. NONLOCAL 化のための定式化

2. 1 Drucker-Prager の破壊基準と損傷パラメータの定義

一般場の Drucker-Prager 則は(1)式で表される。しかしここでは 2 次元平面応力状態をまず考えることにする。

$$f = f(\sigma_{ij}, \omega) = \sqrt{3J_2} + \alpha I_1 - \kappa \quad (1)$$

式(1)で用いている α 及び κ は Mohr-Coulomb の破壊面と Drucker-Prager 則の引張子午線を一致させると次式で表される。

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{3 + \sin \phi}, \quad \kappa = \frac{6c \cos \phi}{3 + \sin \phi} \quad (2)$$

*1 名古屋大学大学院 工学研究科 地圏環境工学専攻 (正会員)

*2 名古屋大学大学院 工学研究科 土木工学専攻 (正会員)

*3 名古屋大学教授 工学部 土木工学科、工博 (正会員)

ここで ϕ は材料の内部摩擦角である。

我々はDrucker-PragerモデルをNONLOCAL化する為に、降伏するガウス点の等価塑性破壊エネルギーが要素分割に拘わらず一定になるような方法を考えるのであるが、その際に引張破壊が卓越しているときには第1主応力-損傷曲線が、圧縮破壊が卓越しているときには第2主応力-損傷曲線がメッシュの切り方に関わらず同一の曲線を描き、この曲線の下側の面積を等価破壊エネルギーと定義したとき、等価破壊エネルギーがその意味で一定となる事を考える。

このことについては後に詳しく述べることにする。ここではまず採用した損傷パラメーター ω を定義する。まず有効塑性ひずみ $d\epsilon_{pe}$ を(3)式のように表す。

$$\begin{aligned} d\epsilon_{pe} &= \frac{\alpha+1}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}}\right) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}}\right)}} \cdot \sqrt{d\epsilon_{ij}^p \cdot d\epsilon_{ij}^p} \\ &= d\lambda \frac{\alpha+1}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}}\right) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}}\right)}} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\right)} = d\lambda(\alpha+1) \end{aligned} \quad (3)$$

さて次に損傷パラメーターを $\omega = \left[\int d\epsilon_{pe} \right] \cdot l$ で定義すると式(4)のように表される。ただし l は1要素の平均的な長さである。

$$\omega = \left[\int d\lambda(\alpha+1) \right] \cdot l \quad (4)$$

式(4)において $d\lambda$ は式(5)~式(6)によって導かれる。

まずコンシステンシー状態は式(5)の様に書ける。

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma} D^e \left(d\epsilon - d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial f}{\partial \omega} d\omega = \frac{\partial f}{\partial \sigma} D^e \left(d\epsilon - d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial f}{\partial \omega} d\lambda(\alpha+1) \cdot l \quad (5)$$

これから $d\lambda$ を求めると式(6)の様に書ける。

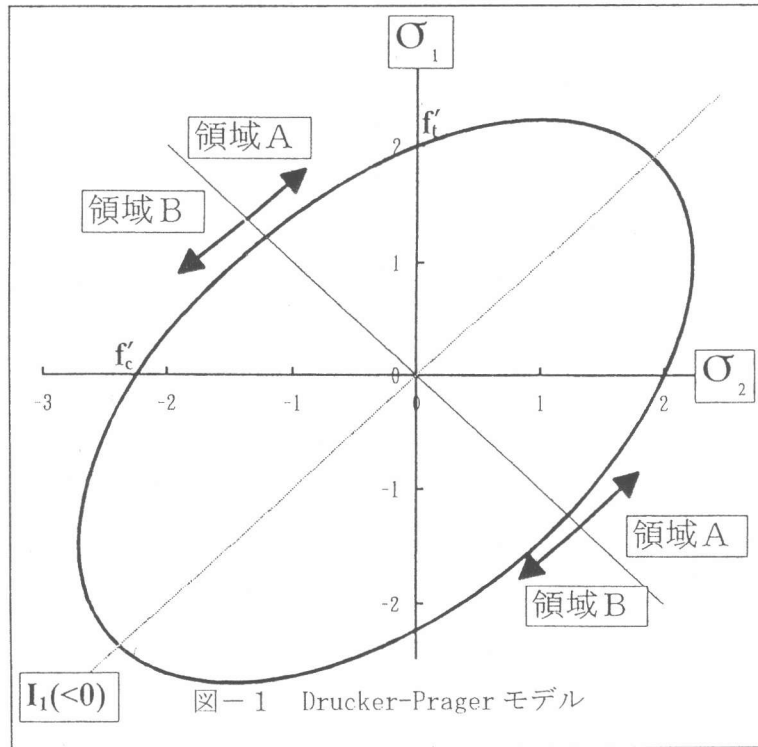
$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma} D^e \cdot d\epsilon}{-\frac{\partial f}{\partial \omega} (\alpha+1) \cdot l + \frac{\partial f}{\partial \sigma} D^e \frac{\partial f}{\partial \sigma}} \quad (6)$$

2. 2 等価破壊エネルギーを用いたNONLOCAL化の為の定式化

図-1に中間主応力が0の時のDrucker-Pragerモデルをしめす。図-1における領域Aは引張破壊が卓越する領域であり与えられた等価破壊エネルギーに等しくなるように第1主応力と損傷パラメーターの関係を定義する。即ち例えば

$$\sigma_1 = f'_t \exp\left(-5.0 \cdot \frac{\omega}{\omega^*}\right) \quad (7)$$

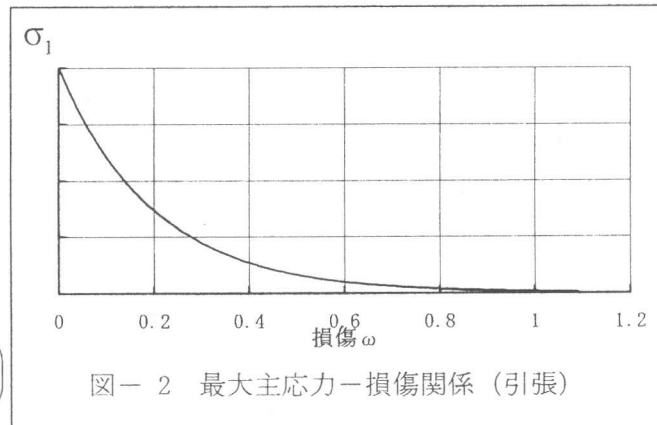
式(7)は図-2の様に表される。
 さて、ここで(7)の関係を c, ϕ の値に反映させる必要があるが、
 $\phi = const.$ と置くことにすると、
 単純に一軸引張状態から、(7)式と c, ϕ との関係が導かれる。
 このとき平面応力状態において一軸引張状態で降伏するときを考える
 と応力状態は
 $\sigma_1 = f'_t, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$ であり、
 $J_2 = \frac{1}{3} f'_t{}^2, I_1 = f'_t$ となる。この
 とき $f'_t = \sigma_1 (>0)$ であり、Drucker-Prager モデルは式(8)の様に書く
 ことが出来る。



$$f = \sigma_1 + \frac{2 \sin \phi}{3 + \sin \phi} \sigma_1 - \frac{6c \sin \phi}{3 + \sin \phi} = 0 \quad (8)$$

このとき $\phi = 5.0^\circ$ とすると定数であるから c は σ_1 との関係で式(9)で表される。

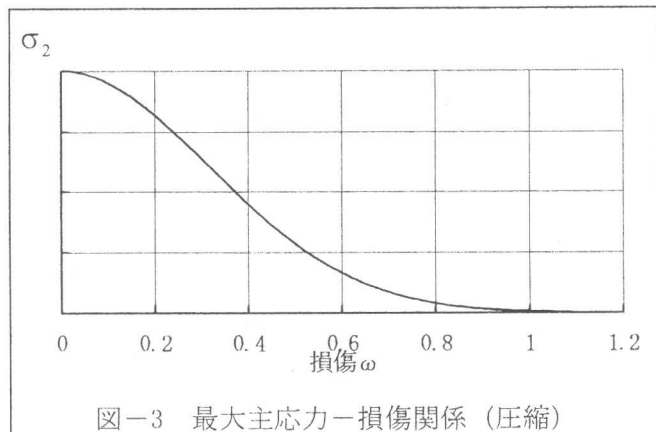
$$c = \frac{1 + \sin \phi}{2 \cos \phi} \sigma_1 = \frac{1 + \sin \phi}{2 \cos \phi} f'_t \exp\left(-5.0 \cdot \frac{\omega}{\omega^*}\right) \quad (9)$$



また、図-1における領域Bは圧縮破壊が卓越する領域であり、与えられた等価破壊エネルギーに一致するように第2主応力と損傷パラメータの関係を定義する。例えば、

$$\sigma_2 = f'_c \exp\left(-5.0 \cdot \frac{\omega^2}{\omega^*}\right) \quad (10)$$

式(10)は図-3の様に表される。
 ここでさらに式(10)を反映させて c, ϕ との関係を導く。平面応力状態において一軸圧



縮状態で降伏するときを考えると応力状態は $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = f'_c, \sigma_3 = 0$ であり、

$J_2 = \frac{1}{3}f'_c{}^2, I_1 = f'_c$ となる。このとき $f'_c = \sigma_2 (< 0)$ であり、Drucker-Prager モデルは式(11)の様に書くことが出来る。

$$f = -\sigma_2 + \frac{2 \sin \phi}{3 + \sin \phi} \sigma_2 - \frac{6c \sin \phi}{3 + \sin \phi} = 0 \quad (11)$$

このとき $\phi = 5.0^\circ$ とすると定数であるから c は σ_2 との関係で式(12)で表される。

$$c = \frac{-3 + \sin \phi}{6 \cos \phi} \sigma_2 = \frac{-3 + \sin \phi}{6 \cos \phi} f'_c \exp\left(-5.0 \cdot \frac{\omega^2}{\omega^*}\right) \quad (12)$$

3. 解析方法及び解析結果

解析対象構造物及び解析モデルを図-4 に示す。解析対象構造物は長さ126cm×幅12cmの薄板であり、短辺の片方を単純支持し、もう片方の短辺を長さ方向に載荷する。解析モデルは図-4 の解析モデル1と解析モデル2の二つである。また、ひずみの局所化を表現するために図-1 の様に WEAK-ELEMENT を導入した。この WEAK-ELEMENT の強度は、普通の要素が $f'_t = 3.0MPa$ であるのに対し、 $f'_t = 2.0MPa$ を用いた。載荷は変位増分法によるFEM解析であるため、載荷点に軸引張または軸圧縮方向に強制変位を与えた。収束のための繰り返し計算は Newton-Raphson 法に従って不平衡力が収束判定条件を満足するまで収束計算を行った。用いた要素は4節点アイソパラメトリック要素である。解析に用いた材料定数は、ヤング係数20000Mpa, ポアソン比0.2である。計算は平面応力状態の仮定の下で2次元で行った。

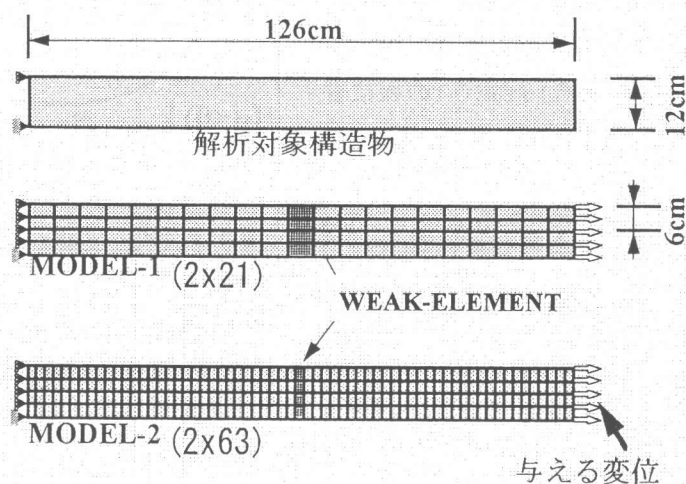


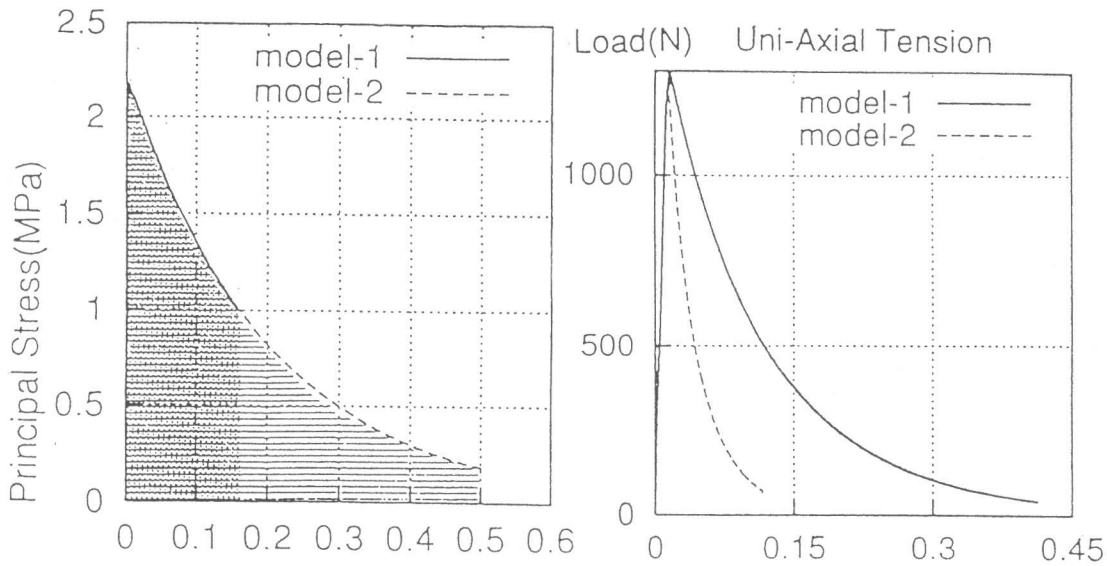
図 4.1 解析モデル

図-5にNONLOCAL化していない定式の基で計算を行った結果より、主応力-損傷関係図と、軸方向の荷重-変位関係を示す。図-5の主応力-損傷関係図から、等価破壊エネルギーがメッシュの切り方によって大きく異なり、軟化領域における荷重-変位曲線にも大きな差が生じる事が確認できる。式(16)において m は定数であり、今回は $m=10.0$ を用いた。

ここでNONLOCAL化した定式によって計算した結果より、主応力-損傷関係図と、軸方向の荷重-変位関係を図-6に示す。図-6から、等価破壊エネルギー、軟化曲線共にメッシュの切り方に殆ど依存していない事が分かる。

図-5と図-6を比較すると分かるように、以上のような定式によって計算したとき、メッシュ

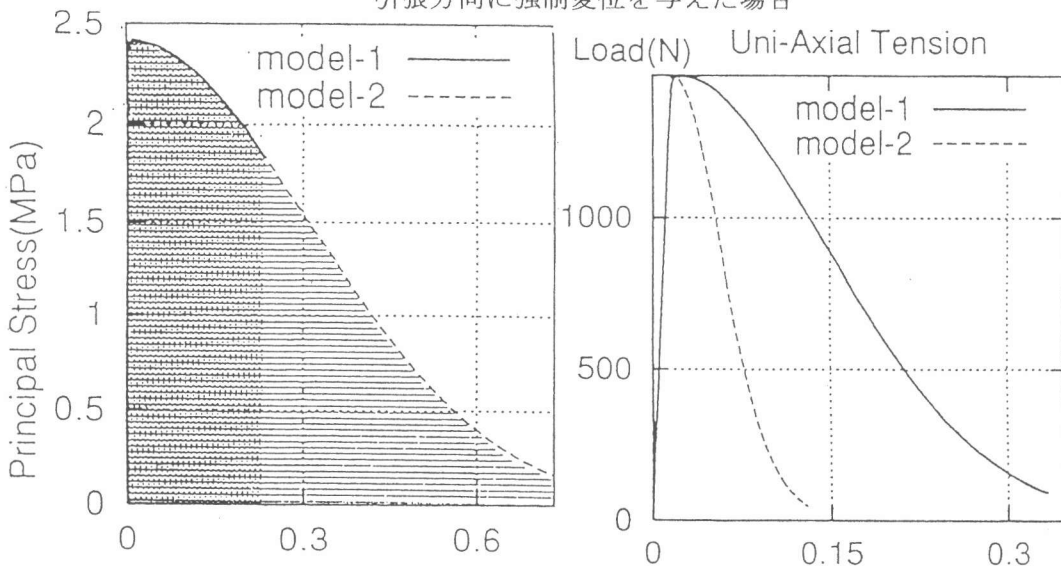
図-5と図-6を比較すると分かるように、以上のような定式によって計算したとき、メッシュ



Damage
第1主応力-損傷関係

Displacement(cm)
荷重-変位関係 (LOCAL)

引張方向に強制変位を与えた場合



Damage
第2主応力-損傷関係

Displacement(cm)
荷重-変位関係 (LOCAL)

圧縮方向に強制変位を与えた場合

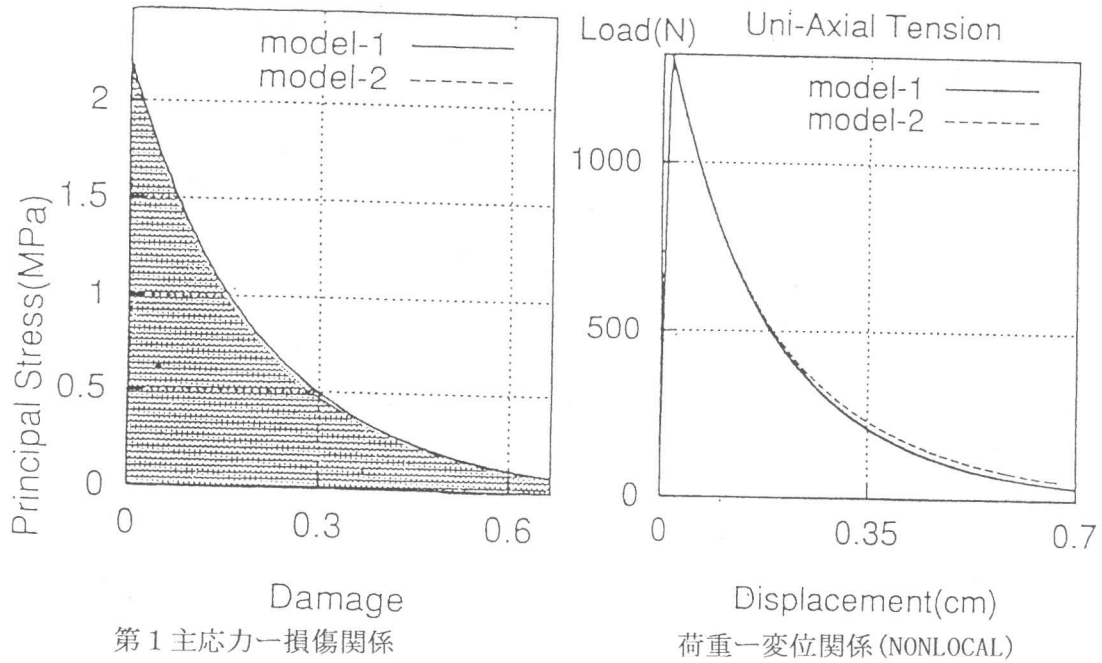
図-5

依存性は解消されることが分かる。

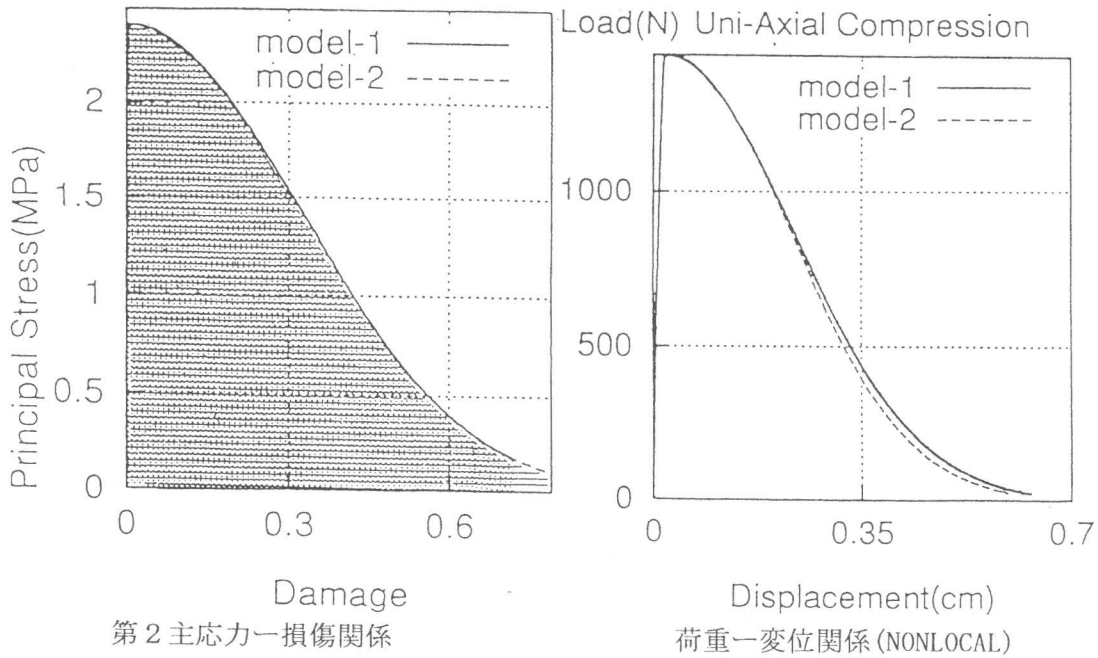
5. 結論

今回の定式化により、軟化領域を含む増分形式におけるFEM解析法において、一軸引張及び一軸圧縮荷重については要素分割に拘わらず、ほとんど同一の軟化曲線を描くことが出来ることが分かった。

等価破壊エネルギーを今回の場合、図-1の領域AからBへの移行がスムーズに連続させていな



引張方向に強制変位を与えた場合



圧縮方向に強制変位を与えた場合

図-6

い為に、応力状態が2つの領域の境界の付近(せん断破壊が卓越)にあるときに、応力状態の少しの違いによって軟化の程度が大きく変わってしまう可能性がある。今後は、このあたりの検討と実構造物の解析への応用の検討を行うつもりである。

[1] W. F. Chen(色部 誠,河角 誠,安達 洋 監訳): コンクリート構造物の塑性解析,

丸善株式会社, 1985