

# 論文 逆解析手法による有効弾性係数の推定

潮田 和司\*1・西田 徳行\*2・土橋 吉輝\*3・松井 邦人\*4

要旨：本論文は、2次元 FEM 温度応力解析において、実構造物における有効弾性係数をどのようにモデル化すれば計測値に近い解析結果が得られるかを探る目的で、計測で得られたひずみから有効弾性係数を推定する逆解析手法を開発した。本文では、まず逆解析手法を数式化し、次に数値シミュレーションを行い逆解析において計測点の数が収束性に及ぼす影響および既知パラメータの誤差が推定結果に及ぼす影響を検討した。

キーワード：マスコンクリート、逆解析、有効弾性係数、FEM、数値シミュレーション

## 1. はじめに

現在、マスコンクリートの温度応力を計算する手法としては、有限要素法(FEM)あるいは JCI マスコンクリート温度応力委員会が提案した Compensation-Plane 法(CP 法)[1]などがあり、設計・施工において広く一般に用いられている。これら FEM あるいは CP 法とも、解析手法そのものは確立しているが、反面実構造物のモデル化、材料物性値の設定をどのように行うかが解析精度を高める上で重要になる。特に、マスコンクリートの弾性係数に関しては、コンクリート打設後から硬化過程におけるクリープ等による応力緩和の影響を取り入れた有効弾性係数が用いられており、これをどのように設定するかが解析精度を高める上で極めて重要になる。

そこで本論文では、計測によって得られるひずみから実構造物の有効弾性係数を推定するために、2次元 FEM 温度応力解析に基づいた逆解析手法を開発した。本論文では、開発した逆解析手法の適用性を確認する目的で、数値シミュレーションにより逆解析の不安定性および既知パラメータ誤差の影響について検討した。具体的には、コンクリート躯体内のひずみを 2次元 FEM により求めそれを計測データと見なし、Gauss-Newton 法を用いて有効弾性係数を推定している。

## 2. FEM による温度応力解析

### 2.1 FEM の定式化

温度応力解析には、2次元 FEM による有効弾性係数に基づく増分法を用いることにする。増分法は、各時間ステップ毎に応力を計算し加算していく方法である。

セメントの水和熱に起因する熱荷重のみによる平衡方程式は次式で与えられる。

$$\int_V \delta \{\Delta \epsilon\}^T \{\Delta \sigma\} dV = 0 \quad (1)$$

ここに、 $\{\Delta \sigma\}$ ：応力ベクトル、 $\{\Delta \epsilon\}$ ：ひずみベクトル、 $V$ ：物体の体積、 $\delta \{ \}$ ：仮想変化量、 $\{ \}^T$ ：ベクトルの転置、をそれぞれ表す。

応力-ひずみ関係式は、次のように導くことができる。すなわち、全ひずみベクトル $\{\Delta \epsilon\}$ を、弾性ひずみベクトル $\{\Delta \epsilon^e\}$ と熱ひずみベクトル $\{\Delta \epsilon^t\}$ の和として

- 
- \* 1 西松建設(株)技術研究所技術部土木技術課、工修 (正会員)
  - \* 2 西松建設(株)技術研究所技術部土木技術課主任 (正会員)
  - \* 3 西松建設(株)技術研究所技術部土木技術課主任研究員
  - \* 4 東京電機大学教授 理工学部建設工学科、Ph.D. (正会員)

$$\{\Delta \varepsilon\} = \{\Delta \varepsilon^e\} + \{\Delta \varepsilon^i\} \quad (2)$$

と表す。また、 $\{\Delta \sigma\}$ と $\{\Delta \varepsilon^e\}$ はフックの法則から

$$\{\Delta \sigma\} = [D^e] \{\Delta \varepsilon^e\} \quad (3)$$

と表すことができる。ここで $[D^e]$ は、弾性応力-ひずみマトリックスである。式(2)と式(3)から応力-ひずみ関係式は

$$\{\Delta \sigma\} = [D^e] \left( \{\Delta \varepsilon\} - \{\Delta \varepsilon^i\} \right) \quad (4)$$

となる。

次に、要素内のひずみベクトル $\{\Delta \varepsilon\}$ は、節点変位ベクトル $\{\Delta d\}$ を用いて

$$\{\Delta \varepsilon\} = [B] \{\Delta d\} \quad (5)$$

と表すことができる。ここで、 $[B]$ はひずみ-変位マトリックスである。式(1)に式(4)、式(5)を代入すると

$$\int_{V_e} [B]^T [D^e] [B] dV \{\Delta d\} = \int_{V_e} [B]^T [D^e] \{\Delta \varepsilon^i\} dV \quad (6)$$

となり、式(6)で計算される $\{\Delta d\}$ を式(5)に代入すると全ひずみベクトル $\{\Delta \varepsilon\}$ が求まる。

## 2.2 弾性応力-ひずみマトリックスおよびコンクリートの有効弾性係数

熱ひずみを考慮した2次元ひずみ問題の弾性応力-ひずみマトリックス $[D^e]$ およびコンクリートの有効弾性係数 $E_c(t)$ を次のように表す。

$$[D^e] = \frac{E_c(t)(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$E_c(t) = \beta \times E_c(t_c) \quad (\text{ただし、温度上昇時} : \beta = \beta_1, \text{温度降下時} : \beta = \beta_2) \quad (8)$$

ここに、 $\nu$ はポアソン比、 $\beta$ はクリープ等によるコンクリート弾性係数の補正係数である。ひびわれ指針[2]によると、クリープ係数は温度上昇時と温度降下時で分けて与えており、本論文でもこれにならい、温度上昇時の補正係数を $\beta_1$ 、温度降下時の補正係数を $\beta_2$ とする。また、 $E_c(t_c)$ は強度試験から得られる弾性係数で次式で与えるものとする。

$$E_c(t_c) = \frac{t_c}{a + b t_c} \quad (9)$$

ここに、 $a, b$ は実験定数であり $t_c$ は有効材齢(日)である。

## 2.3 熱ひずみベクトル

熱ひずみベクトル $\{\Delta \varepsilon^i\}$ は等方性材料に対しては、平面ひずみの場合に

$$\{\Delta \varepsilon^i\} = \begin{Bmatrix} (1+\nu)\alpha\Delta T \\ (1+\nu)\alpha\Delta T \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

で与えられる。ここに、 $\alpha$ は熱膨張係数、 $\Delta T$ は温度変化量である。

### 3. 逆解析手法

本論文では、式(8)におけるコンクリート弾性係数の補正係数 $\beta_1, \beta_2$ の2個のパラメータをひずみの計測値から推定する。これら2個のパラメータは、式(5)で表される全ひずみを用いて推定するものとする。増分法による全ひずみは、次式で表される。

$$\varepsilon(t_i) = \varepsilon(t_{i-1}) + \Delta\varepsilon(t_i) \quad (11)$$

ここに、 $\varepsilon(t_i)$ は時間 $t_i$ における全ひずみ、 $\varepsilon(t_{i-1})$ は時間 $t_{i-1}$ における全ひずみ、 $\Delta\varepsilon(t_i)$ は時間 $t_i$ における全ひずみ増分である。

次に、逆解析手法について説明する。コンクリート躯体内の全ひずみは力学的特性の関数であるから、時刻 $t$ における $i$ 点の全ひずみを $\varepsilon_i(\mathbf{X}, \bar{\mathbf{Y}}, t)$ と表す。ここで上記2個のパラメータを未知パラメータとし $\mathbf{X} = \{\beta_1, \beta_2\}^T$ で表し、コンクリートおよび地盤のポアソン比、熱膨張係数、地盤の弾性係数を既知パラメータとし $\bar{\mathbf{Y}}$ で表している。そこで計測点 $i$ における計測全ひずみを $u_i(t)$  ( $i = 1, \dots, N$ )とし、式(12)のような評価関数 $f$ を考える。

$$f = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^N \left\{ u_i(t) - \varepsilon_i(\mathbf{X}, \bar{\mathbf{Y}}, t) \right\}^2 dt \quad (12)$$

ここに $t_0, t_1$ は逆解析に使用する時間領域の下限と上限であり、 $N$ は測点数を意味する。未知パラメータ $\mathbf{X}$ は、式(12)が最小となるように $\mathbf{X}$ を定めれば良く、本論文では式(12)を最小化する手法として Gauss-Newton 法[3]を適用している。ここで、式(12)を最小化するためには全ひずみに対する未知パラメータの感度 ( $\partial\varepsilon_i/\partial X_j$ ) を計算しなければならない。 $\partial\varepsilon_i/\partial X_j$ は差分法でも計算できるが、本論文ではこれを解析的(基本的に要素内ひずみベクトル $\{\Delta\varepsilon\}$ の計算方法と同じ手順)に計算している。 $\partial\varepsilon_i/\partial X_j$ の計算で要素内ひずみベクトル $\{\Delta\varepsilon\}$ の計算方法と異なる点は、式(6)の両辺を未知パラメータ $\mathbf{X}$ で偏微分し得られた連立方程式から $\partial\Delta d_i/\partial X_j$ を計算するところである。 $\partial\Delta d_i/\partial X_j$ が求まれば式(5)から $\partial\Delta\varepsilon_i/\partial X_j$ が求まり、 $\partial\Delta\varepsilon_i/\partial X_j$ が求まれば式(11)から $\partial\varepsilon_i/\partial X_j$ が求まる。また、逆解析における数値計算上の不安定を配慮して特異値分解[4]を用いて解いている。

### 4. 数値シミュレーションによる計算例

前節で提案した逆解析手法をここでは数値シミュレーションを用いて検証する。対象とした構造物は、図-1に示すように地盤上に直接打設されるスラブ状構造物である。FEM解析では、4節点アイソパラメトリック要素を用い120節点、97要素に分割しモデル化した。また、境界条件は図-1に示すように地盤底面で水平方向および垂直方向を拘束し、地盤ならびにコンクリートの対象軸となる中心面上および地盤の側面(端部)において水平方向を拘束した。さらに、解析に必要なコンクリートおよび地盤の力学的特性(基準値)は表-1に示した。ここで、温度解析の結果材齢2日で最高温度となることから、この材齢で補正係数 $\beta$ を分けている。本解析では、図-1に示した中央断面において5個の計測点を設定し、表-1に示した基準値を用いて計算した時のこの計測点における全ひずみを計測データと想定した。図-2に、計測データと想定した計測点①, ③, ⑤の全ひずみ履歴図を示した。なお、逆解析には0日~30日のデータを使用した。

#### 4.1 計測点の数の影響

逆解析においては、計測点の数(計測データ数)によって安定性が異なり、未知パラメータの

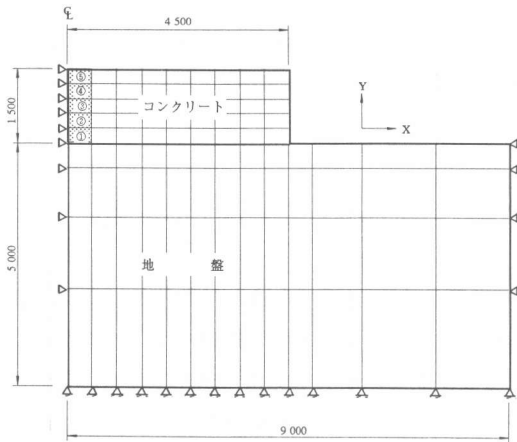


図-1 解析モデル

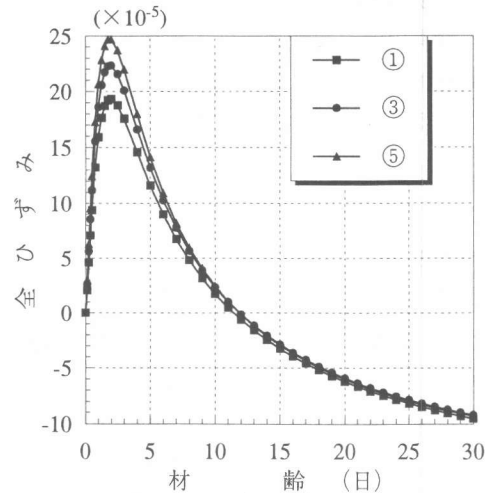


図-2 全ひずみ履歴図

表-1 力学的特性 (基準値)

	コンクリート	地盤
弾性係数(N/mm <sup>2</sup> )	$E_c(t_e) = \frac{t_e}{8.0 + 3.0 t_e} \times 10^5$	1000
有効弾性係数(N/mm <sup>2</sup> )	$E_c(t) = \beta \times E_c(t_e)$ $\beta_1 = 0.5 \quad (t \leq 2日)$ $\beta_2 = 0.7 \quad (t \geq 2日)$	—
ポアソン比	0.2	0.3
熱膨張係数(1/℃)	$10 \times 10^{-6}$	$10 \times 10^{-6}$

収束値が異なったり、あるいは解が発散する場合もある。そこで、計測点の数の違いが逆解析の安定性および逆解析結果に及ぼす影響を検討した。

検討ケースは、case1として図-1に示す①~⑤の5点すべてのデータを用いた時、case2として①,③,⑤の3点を用いた時、case3として②,④の2点を用いた時、case4として③の1点のみを用いた時の4ケースである。そこで、初期値を $\beta_1=1, \beta_2=1$ とした時の各検討ケースにおける式(12)の評価関数、逆解析の安定性の指標となる条件数[4]、補正係数 $\beta_1, \beta_2$ の収束過程をそれぞれ図-3に示す。図-3より、計測点の数が逆解析結果に及ぼす影響は小さく、どのケースにおいても収束過程はほぼ同じであった。さらに、補正係数 $\beta_1$ はおよそ6回で真値に収束し、補正係数 $\beta_2$ はおよそ11回で収束し、補正係数 $\beta_2$ は若干収束性が悪くなっている。

#### 4.2 既知パラメータの誤差の影響

逆解析においては、解析上重要であるのにも関わらず実構造物における値が不明確なパラメータを未知パラメータとし、それ以外の解析にあまり影響を及ぼさないパラメータ、実験や事前調査等からある程度の値はわかっているパラメータを既知パラメータとして扱っている。しかし、解析に用いる既知パラメータの値と実構造物における値とを比較した場合、これらは近い値ではあるが完全に一致した値ではなく誤差がある。既知パラメータに誤差が含まれていると推定結果はこの誤差を反映した結果となってしまう。

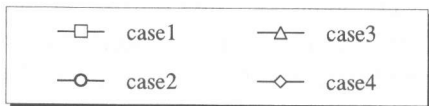
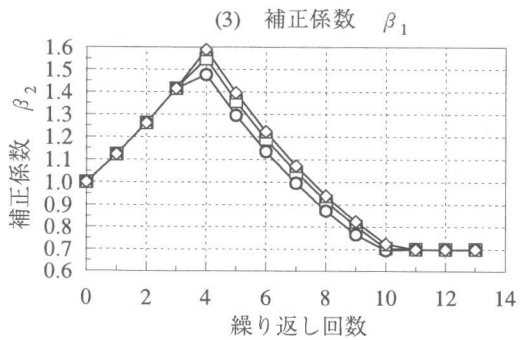
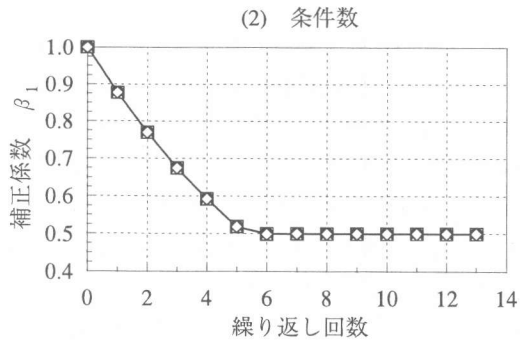
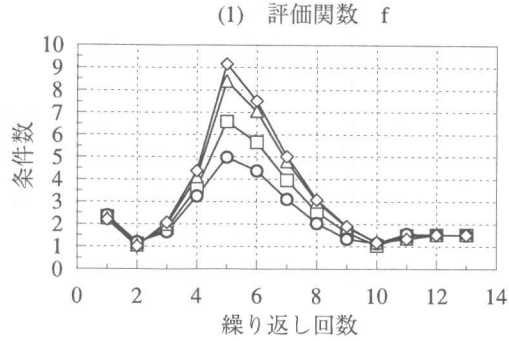
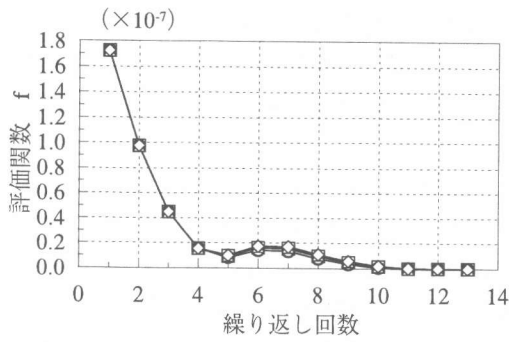


図-3 収束過程

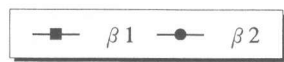
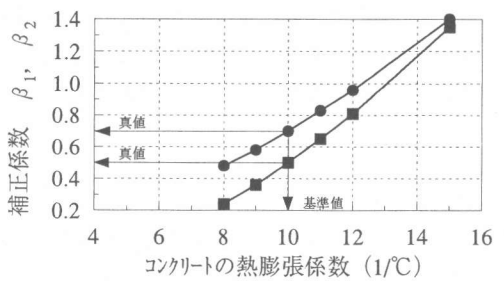
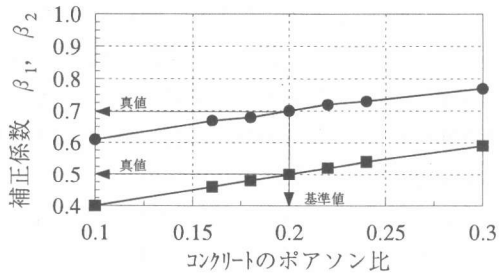
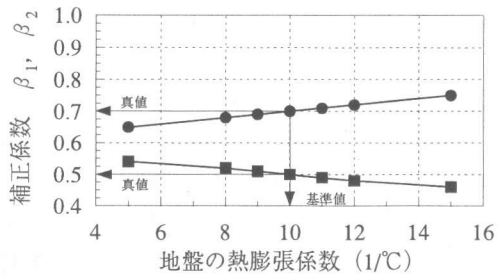
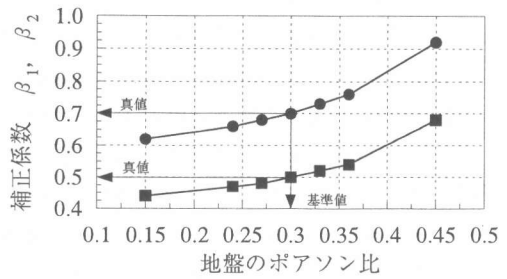
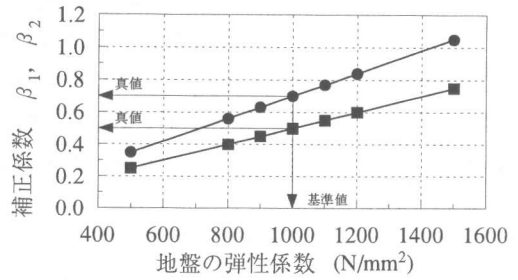


図-4 既知パラメータ誤差の影響

既知パラメータの誤差が真値に対して僅かな範囲であれば推定結果は誤差に比例して変化すると考えられる。しかし、誤差が真値に対して大きく離れた場合、推定結果は指数的に変化するか比例的に変化するかは不明である。また、既知パラメータの誤差が推定結果に及ぼす影響は、個々の既知パラメータによって異なると考えられる。

そこで、既知パラメータに誤差が含まれるとき、各既知パラメータの誤差の大きさにより推定結果はどれほど異なってくるかを検討した。既知パラメータは、地盤の弾性係数、ポアソン比、熱膨張係数、およびコンクリートのポアソン比、熱膨張係数の5個であり、誤差の大きさは、基準値に対し変動係数で $\pm 10\%$ 、 $\pm 20\%$ 、 $\pm 50\%$ とした。その解析結果を図-4に示す。図-4より、地盤の弾性係数、地盤の熱膨張係数およびコンクリートのポアソン比の誤差が推定結果に及ぼす影響は、誤差の大きさに比例する。また、地盤のポアソン比およびコンクリートの熱膨張係数に関しては、誤差の大きさが $\pm 20\%$ の範囲であれば誤差の大きさに比例する。

次に、既知パラメータの誤差の大きさを20%とした場合、これらの誤差による推定結果の変化量は、コンクリートの熱膨張係数に誤差が含まれるとき補正係数 $\beta_1$ が約60%、補正係数 $\beta_2$ が約40%、地盤の弾性係数に誤差が含まれるとき補正係数 $\beta_1$ 、 $\beta_2$ が20%である。その他、地盤のポアソン比、地盤の熱膨張係数およびコンクリートのポアソン比の誤差による推定結果の変化量は10%以下である。

## 5. 結論

実構造物におけるコンクリート打設後からのクリープ等の影響を考慮したコンクリートの有効弾性係数を推定する目的で、計測で得られる全ひずみから有効弾性係数の補正係数を推定する逆解析手法を開発した。そして、数値シミュレーションを行い開発した逆解析手法を検証した。あらかじめ、力学的特性値を仮定し温度応力解析を行い、この解析全ひずみを計測データと想定し、Gauss-Newton法を用いて補正係数 $\beta_1$ 、 $\beta_2$ を推定した。その結果、次のような結論が得られた。

- 1)数値シミュレーションにおける逆解析の収束性は、検討した範囲では、計測点の数の違いにより収束値が異なったりあるいは解が発散したりすることはなく安定していた。
- 2)既知パラメータの誤差が推定結果に及ぼす影響は、誤差の大きさが変動係数で $\pm 20\%$ の範囲であれば誤差の大きさに比例する。
- 3)コンクリートの熱膨張係数と地盤の弾性係数の誤差による推定結果の変化量は、誤差の大きさを20%と仮定すると約30～60%である。

今後、実測データにこの逆解析手法を適用し、実構造物における有効弾性係数のモデル化について検討していきたいと考えている。また、実測データは種々のノイズが含まれているため、逆解析は、収束回数が多くなったりあるいは解が発散したりするなど不安定になることが予想される。

## 【参考文献】

- [1]マスコンクリートの温度応力検討委員会：外部拘束係数の同定とそれに基づく温度応力計算方法の提案（その1）、コンクリート工学 Vol.23, No.8, pp.4～14, 1985.5.
- [2]日本コンクリート工学協会：マスコンクリートびびわれ制御指針、技報堂 pp.68～69, 1986.3.
- [3]松井邦人・西田德行・土橋吉輝・潮田和司：逆解析手法によるマスコンクリートの熱特性値の推定、コンクリート工学年次論文報告集 Vol.16, No.1, pp.1347～1352, 1994.6.
- [4]久保司郎：逆問題、培風館 pp.37～39, 1992.