

## 論文 新しい増分解析法によるコンクリートの曲げ破壊挙動の解析

富山潤\*<sup>1</sup>伊良波繁雄\*<sup>2</sup>和仁屋晴謹\*<sup>3</sup>

**要旨:** コンクリートの引張軟化を考慮した数値解析でスナップバックが生じているときの解析方法として弧長増分法や $R_{min}$ 法などがある。これらの解析法では静的釣合い式を用いているためにスナップバックが生じる時は計算のアルゴリズムが複雑になる。筆者らは動的釣合い式いわゆる運動方程式を用いた線形加速度理論に基づく新しい増分解析法を提案した。本研究は、提案した解析法の適用範囲をさらに拡張するために軟化を考慮したはり要素を用いて鉄筋コンクリートはりの曲げ破壊解析を行い、解析方法の妥当性を検討した。

**キーワード:** 破壊力学, 引張軟化, 増分解析, 動的解析, 有限要素法

## 1. はじめに

コンクリートの引張破壊によってスナップバックが生じる時の有限要素解析では、最大荷重点付近およびそれ以降を増分法で解析する時は数値解析上不安定になりやすい。このような問題を解くための増分法として弧長増分法 [1] や $R_{min}$ 法 [2] がある。弧長増分法は解析プログラムの複雑さ、 $R_{min}$ 法は引張軟化の進行や除荷が至る所で起こると、数値解が安定して得られないことがある。このために、筆者らは弧長増分法や $R_{min}$ 法のように静的釣合い式ではなく速度・加速度を考慮した動的釣合い式、いわゆる運動方程式を用いた増分解析法を新たに提案すると同時に無筋コンクリートはりの直接引張破壊や曲げ破壊の数値解析例を示した [3]。これらの数値解析結果は実験値や他の数値解との一致が良好であり、増分解析の途中にスナップバックが生じる問題に対しても安定して数値解を得ることができた。本研究は、筆者らが提案した運動方程式を用いた増分解析をさらに適用範囲を広げるために、コンクリートの引張軟化時の除荷、コンクリートの圧縮領域での非線形な応力-ひずみ関係、鉄筋のひずみ硬化等を考慮した解析プログラムを作成した。そして、鋼繊維補強コンクリートはり、低鉄筋比コンクリートはりの曲げ破壊の解析を行い解析方法の妥当性を検討した。

## 2. 解析方法

## 2.1 はり要素の剛性マトリックス, 質量マトリックスおよび減衰マトリックス

引張軟化を考慮した剛性方程式の導き方は文献 [4] に詳しく述べているので、ここでは簡単に説明する。図-2 に示す節点 1, 2 を有するはり要素の剛性マトリックスを導くのに、鉄筋コンクリートの分野でよく知られている方法、すなわち、一本のはりを高さ方向に分割して計算するファイバーモデルを用いた。図-3 に示すように、はりの軸方向に X 座標、高さ方向に Y 座標、XY 面に垂直に Z 座標を仮定すると要素剛性マトリックスは式(1)で表される。

- 
- \* 1 琉球大学大学院 工学研究科建設工学専攻 (正会員)
  - \* 2 琉球大学助教授 工学部環境建設工学科, 博士 (工学) (正会員)
  - \* 3 琉球大学助教授 工学部環境建設工学科 (正会員)

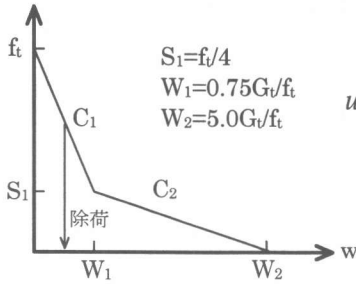


図-1 引張軟化曲線

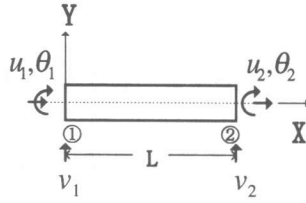


図-2 はり要素

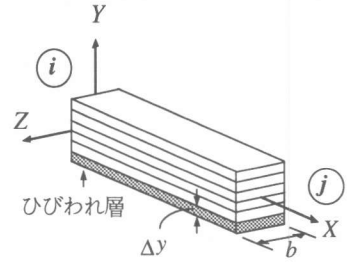


図-3 はり要素の座標

$$[k] = \begin{bmatrix} E_a/L & 0 & -E_b/L & -E_a/L & 0 & E_b/L \\ & 12E_c/L^3 & 6E_c/L^2 & 0 & -12E_c/L^3 & 6E_c/L^2 \\ & & 4E_c/L & E_b/L & -6E_c/L^2 & 2E_c/L \\ & & & E_a/L & 0 & -E_b/L \\ & sym & & & 12E_c/L^3 & -6E_c/L^2 \\ & & & & & 4E_c/L \end{bmatrix} \quad (1)$$

ここで、 $L$ は要素の長さ、 $E_a$ 、 $E_b$ 、 $E_c$ は図-3に示すように、コンクリートはりを高さ方向に層分割し、式(2)のような数値積分で表される。

$$E_a = b \sum_{j=1}^l E_j \Delta y, \quad E_b = b \sum_{j=1}^l E_j y_j \Delta y, \quad E_c = b \sum_{j=1}^l E_j y_j^2 \Delta y \quad (2)$$

ここで、 $b$ ははりの幅、 $l$ は層数、 $\Delta y = H/l$ 、 $H$ ははりの高さ、 $y_j = j$ 層の $Y$ 座標、 $E_j = j$ 層のヤング係数である。引張破壊域が進行するにつれて剛性が変化するため、分割した層の $n$ 番目のヤング係数は弾性状態、引張軟化状態(図-1)、圧縮破壊状態(図-4)に応じて次式を用いた。なお、引張軟化曲線の第二勾配以降は、剛性をゼロ(第三勾配)として解析した。

弾性状態	$E_n = E$	(コンクリートのヤング係数)
引張軟化	$E_n = \frac{C_1 EL}{(E + C_1 L)}$	(応力が引張軟化曲線の第一勾配の時)
	$E_n = \frac{C_2 EL}{(E + C_2 L)}$	(応力が引張軟化曲線の第二勾配の時)
圧縮破壊	$E_n = E_{c1}, E_{c2}, E_{c3}, E_{c4}$	(図-4に示すような接線勾配)

ここで、 $E$ は弾性状態のヤング係数、 $C_1$ 、 $C_2$ は図-1の引張軟化曲線の勾配である。

鉄筋に対しては図-5に示すように、ひずみ硬化を考慮して次の値を用いた。

圧縮破壊、引張破壊	$E_n = E_{s1}, E_{s2}, E_{s3}, E_{s4}$	(図-5のように各ひずみ段階での接線勾配)
-----------	--	-----------------------

解析では鉄筋コンクリートはりを、単純に鉄筋層とコンクリート層で層分割し、鉄筋とコンクリートの付着は完全付着と仮定している。

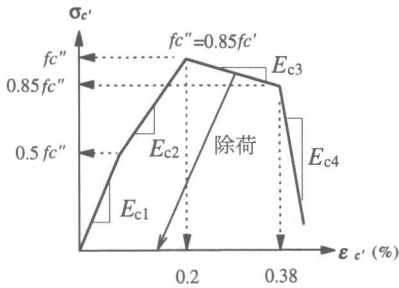


図-4 コンクリートの応力-ひずみ曲線

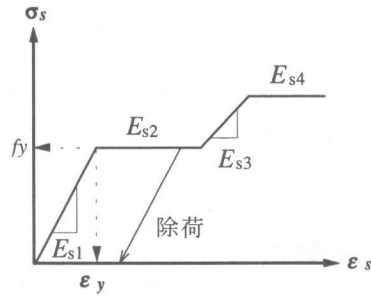


図-5 鉄筋の応力-ひずみ曲線

はり要素の質量マトリックスは軸方向の振動に対する集中質量マトリックスとたわみ振動については、たわみを三次式で仮定して導かれる質量マトリックスを加えた式(3)を用いた。なお式(3)は、はりの振動解析に一般的によく用いられる式 [7] である。

$$[m] = \frac{\gamma AL}{g} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 13/35 & 11L/210 & 0 & 9/70 & -13L/420 \\ & & L^2/105 & 0 & 13L/420 & -L^2/140 \\ & & & 1/2 & 0 & 0 \\ & sym & & & 13/35 & -11L/210 \\ & & & & & L^2/105 \end{bmatrix} \quad (3)$$

ここで、 $A$  は要素の断面積、 $L$  は要素の長さ、 $\gamma$  は密度、 $g$  は重力加速度である。減衰マトリックスとしては構造減衰 [7] を考慮した式(4)を仮定した。

$$[C] = \alpha [K] \quad (4)$$

式(4)で  $\alpha$  は減衰影響係数、 $[K]$  は全体剛性マトリックス、 $[C]$  は減衰マトリックスである。

## 2.2 線形加速度法による増分法

増分型運動方程式は、式(5)のように表すことができる [7]。

$$[M]\{\Delta\ddot{U}\} + [C]\{\Delta\dot{U}\} + [K]\{\Delta U\} = \{\Delta P\} \quad (5)$$

ここで、 $\Delta$  は増分記号、 $U$  は変位、 $\dot{U}$  は速度、 $\ddot{U}$  は加速度、 $[M]$  は全体質量マトリックス、 $\{\Delta P\}$  は外力である。

本研究では、式(5)を線形加速度法を用いて増分解析を行った。線形加速度法では、時間間隔  $\Delta t$  内で加速度が直線的に変化するという仮定を用いて解くが、計算方法は一般的によく知られているので、ここでは省略する [3], [7]。

増分計算は、時間間隔  $\Delta t$  ごとに計算する方法を用いた。時間が増加するにつれ荷重や強制変位等は増加するので、当然、要素内応力も増加する。このために、増分の段階ごとに引張強度に達したかどうかを判定し、引張強度に達した後からは、軟化を考慮したヤング係数を用いて増分解

析を行った。同様にコンクリートの圧縮領域，鉄筋の引張および圧縮領域の各応力に対しても降伏の判定を行い，降伏した後は，その時のひずみの状態に対応したヤング係数を用いて増分解析を行った。また，引張軟化時の除荷も同様に時間間隔  $\Delta t$  で判定を行った。なお，数値解析例に用いた  $\Delta t$  は曲げ振動の固有周期の 1 倍～1/10 倍， $\alpha$  は  $1 \times 10^{-3} \sim 1 \times 10^{-8}$  の間で解析した[8]。

### 3. 数値解析例

#### 3.1 JCI 共通解析

1993 年 JCI で「コンクリート構造の破壊に関する共通解析および実験」が実施された[5]。ここでは共通解析の内から，内田らが行った鋼繊維補強コンクリートはりの実験結果を，筆者らが提案している増分解析法で解析した例を示す。

解析は図-6 示すように，3 等分点荷重したはり(試験体の番号#4， $h=10\text{cm}$ )の曲げ破壊の問題の解析例である。解析は図-6 に示すように，9 要素に分割し高さ方向には 50 層の分割を行っている。鋼繊維補強コンクリートの引張軟化曲線は，多直線モデルを 2 直線モデル(引張強度： $f_t$  の 1/5 の位置で折れ曲がりを持つ 2 直線モデル)に置き換えて解析を行った。

荷重点間の曲げモーメントは一定であるので，ひび割れを最初に導入する要素として④または⑤番の要素の下面に切欠き入れて，2 ケースについて解析した。なお，切欠きの深さは，はり高の 1% とした。

図-7 に内田らの実験結果，平面三角形要素による解析結果[5] および筆者らのはり要素を用いた解析結果を示した。内田らの実験や解析結果と比べると，筆者らの解の最大荷重は少し高めとなっているが全体としては良好な結果を示している。

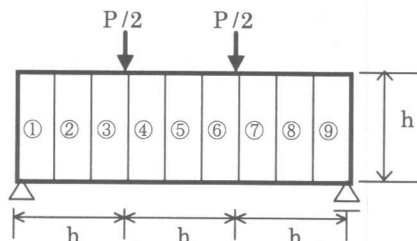


図-6 要素分割

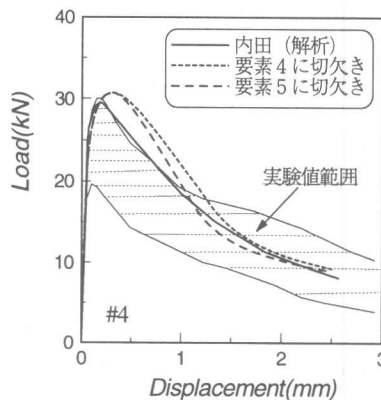


図-7 試験体(#4,  $h=10\text{cm}$ ) の荷重-変位曲線

#### << ひび割れ図におけるひび割れの説明 >>

- : 引張軟化曲線の第一勾配
- ▨ : 引張軟化曲線の第二勾配
- ▩ : 引張軟化曲線の第三勾配
- : 圧縮側のヤング係数  $E_{c2}$
- ▤ : 圧縮側のヤング係数  $E_{c3}$
- ▥ : 圧縮側のヤング係数  $E_{c4}$

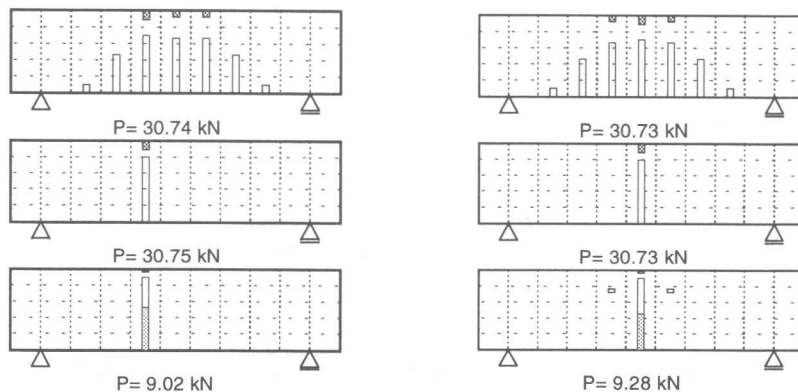


図-8 ひび割れの進展状況(左図は要素④番に，右図は要素⑤番に切欠き)

最大荷重点付近以降のひび割れの進展状況を要素④番と要素⑤番に切欠きがある場合の2ケースについて、図-8に示した。いずれのケースでも、ひび割れは、最大荷重付近までモーメントスパン内に分布しているが、わずかな荷重の変動で急激に、切欠き部のひび割れ一本のみ進展し、それ以外の部分は除荷が起きている。なお、内田らの実験によれば、観察されたひび割れは一本だけである。解析に用いた時間増分は、曲げ振動の固有周期の1倍で $\Delta t = 9.969 \times 10^{-4}$ 秒である。強制変位の増分は0.001mm, 減衰影響係数 $\alpha$ は $1 \times 10^{-7}$ である。

### 3.2 低鉄筋比コンクリートはりの曲げ解析

鉄筋比が小さい鉄筋コンクリートはり、無筋コンクリートはりのように、ひび割れ発生直後に急激に破壊が起こる。ここでは、内田らが行った低鉄筋比コンクリートはりの曲げ試験の結果[6]と筆者らが提案した運動方程式を用いた増分解析法で解析し、比較検討を行う。実験に用いた試験体の種類は表-1に示す通りである。表-1で**b**ははりの幅、**h**ははりの高さ、**L**ははりの長さ、**d**は有効高である。なお、使用した鉄筋は、いずれもD6異形鉄筋である。

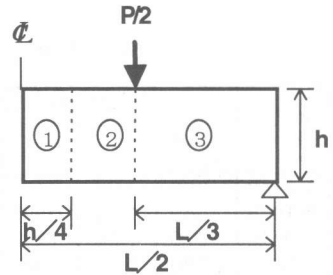


図-9 要素分割

表-1 試験体の種類

供試体番号	供試体寸法 (cm)		鉄筋	鉄筋比 (%)	スパン (cm)
	b×h×L	d			
A-0718	7.5×18×170	15.7	2 D6	0.54	150
A-1018	10×18×170			0.4	
A-2018	20×18×170			0.2	
A-3018	30×18×170			0.13	
A-4018	40×18×170			0.1	
A-5018	50×18×170			0.08	

表-2 コンクリートの強度試験結果

強度 (kgf/cm <sup>2</sup> )			弾性係数 × 10 <sup>5</sup> (kgf/cm <sup>2</sup> )
圧縮	引張	曲げ	
321	28.5	52.8	2.85

コンクリートの強度は表-2に示してある。載荷条件は、三等分点載荷で行われている。解析は図-9に示すように、対称性を用いて3要素ではり高方向の分割数は100層、載荷点の位置に強制変位を加えて解析した。破壊エネルギー $G_f$ は0.1Kgf/cmで引張軟化曲線は図-1に示す2直線モデルを用いた。解析結果の例として図-10, 11に試験体A-1018とA-4018の荷重-変位曲線を示した。これらの図から鉄筋比の差でRCはりの破壊性状が異なることがわかる。

表-3には内田らの実験値( $P_{cr}, P_y, P_u$ )、コンクリートの曲げ強度の寸法依存性を考慮してない計算値(従来法:  $P_{cr1}, P_{y1}, P_{u1}$ )およびそれを考慮した計算値( $P_{cr2}, P_{y2}$ )、そして筆者らの計算値( $P_{cr}^*, P_y^*, P_u^*$ )を示してある。表-3では、 $P_{cr}$ はひび割れ発生荷重、 $P_y$ は鉄筋の降伏荷重、 $P_u$ ははりの終局荷重を意味する。ひび割れ発生荷重 $P_{cr}$ については、内田らの曲げ強度の寸法依存性を考慮

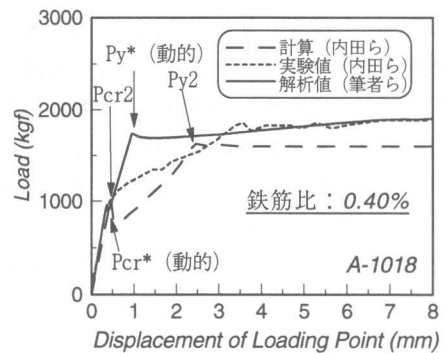


図-10 荷重-変位曲線 (A-1018)

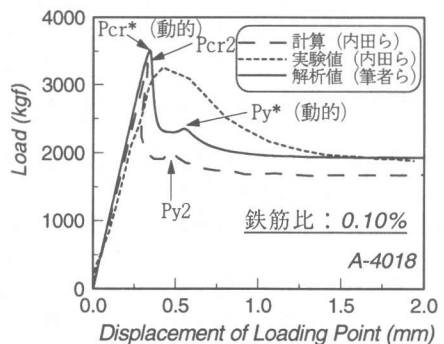


図-11 荷重-変位曲線 (A-4018)

した計算値との一致が良好である。寸法依存性を考慮に入れてない従来法は実験値との差が大きい。鉄筋降伏荷重  $P_y$  については、鉄筋比が 0.1% 以下だと筆者らの値は、実験値より高めとなっている。終局荷重  $P_u$  では、A-4018 で筆者らの値は、実験値より 10% 以上高めとなっているが他の試験体では、 $\pm 10\%$  以内で実験値と良好な一致を示した。なお、解析に用いた時間増分  $\Delta t$  は、曲げ振動の固有周期の 1/10 倍で  $\Delta t = 7.911 \times 10^{-4}$  秒である。強制変位の増分は 0.001mm、減衰影響係数  $\alpha$  は  $1 \times 10^{-4}$  である。

表-3 実験値，従来法，内田らの計算値および筆者らの解析結果

供試体 番号	ひび割れ発生荷重				降伏荷重				終局荷重		
	$P_{cr}$ (kgf)	$\frac{P_{cr1}}{P_{cr}}$	$\frac{P_{cr2}}{P_{cr}}$	$\frac{P_{cr}^*}{P_{cr}}$	$P_y$ (kgf)	$\frac{P_{y1}}{P_y}$	$\frac{P_{y2}}{P_y}$	$\frac{P_{y}^*}{P_y}$	$P_u$ (kgf)	$\frac{P_{u1}}{P_u}$	$\frac{P_{u}^*}{P_u}$
A-0718	790	1.08	0.90	0.95	1760	0.89	0.93	0.94	1950	0.88	0.91
A-1018	1040	1.09	0.88	0.92	1800	0.88	0.93	0.96	2070	0.86	0.91
A-2018	1670	1.36	1.04	1.08	1870	0.87	0.97	1.04	2210	0.91	1.00
A-3018	2780	1.22	0.92	0.95	2080	0.78	0.93	1.03	2360	0.94	0.98
A-4018	3270	1.39	1.03	1.07	1980	0.83	1.04	1.19	2300	0.97	1.17
A-5018	3490	1.62	1.20	1.25	2100	0.79	1.03	1.22	2380	0.95	1.09

#### 4. まとめ

本論文では、速度・加速度を考慮した動的釣合い式である運動方程式を用いた増分解析法で、鋼繊維補強コンクリートは、低鉄筋比コンクリートはりの曲げ破壊解析を行った例を示した。

鋼繊維補強コンクリートはりの三等分点載荷試験の解析結果からは、モーメントスパン内に分布している曲げひび割れが、最終的には 1 本のひび割れに集中化することが、計算の上でも示された。また、荷重-変位関係は、平面三角形要素による内田らの解析結果と良好な一致を示した。

低鉄筋比コンクリートはりの曲げ破壊解析からは、ひび割れ発生荷重、降伏荷重、終局荷重等の解析値が、実験値との誤差が部分的に 10% を越えるところもあるが、全体的には良好な結果を示しており、解析方法の妥当性を示している。

本研究で用いているはり要素は、平面要素に比べると精度は劣るが剛性マトリックスのサイズが小さいために平面および立体ラーメンのような実構造物をコンクリートの引張軟化を考慮して解析するための、1 つの有力な解析法と思われる。実構造物への適用の研究は、今後の課題である。

#### 参考文献

- [1] Rots, J.G.: Computational Modeling of Concrete Fracture, Dissertation, Delft Univ of Techn, 1988
- [2] 伊良波繁雄: ハイブリッドストレスモデルによるコンクリートの引張軟化解析, コンクリート工学年次論文報告集, Vol. 12, No. 2, pp. 753-758, 1990. 6
- [3] 伊良波 繁雄, 富山 潤, 和仁屋 晴謹: コンクリートはりの引張破壊のための一増分解析法, コンクリート工学年次論文報告集, Vol. 18, No. 2, pp. 437-442, 1996. 6
- [4] 伊良波繁雄: はり要素による引張軟化の解析の研究, コンクリート工学年次論文報告集, Vol. 14, No. 2, pp. 897-902, 1992. 6
- [5] 破壊力学の応用研究委員会報告書: 日本コンクリート工学協会, 1993. 10
- [6] 内田 裕市, 瀬古 繁喜, 六郷 恵哲, 小柳 治: 寸法依存性に着目した低鉄筋 RC はりの曲げ破壊性状, 土木学会論文集 No. 451/V-17, pp. 129-138, 1992. 8
- [7] 矢川元基, 半谷裕彦 編著: 有限要素法の基礎, 朝倉書店
- [8] 富山潤: 新しい増分解析法によるコンクリートはりの引張破壊挙動の解析, 琉球大学大学院工学研究科建設工学専攻修士論文, 1997, 2