

# 論文 ひび割れ要素を用いたコンクリートの曲げひび割れの進展に関する有限要素法解析

日比野 憲太<sup>\*1</sup>・児島 孝之<sup>\*2</sup>・高木 宣章<sup>\*3</sup>・松尾 真紀<sup>\*4</sup>

**要旨:** 本研究は、ひび割れ要素を用いて、無筋コンクリートの曲げひび割れの進展に関する2次元有限要素法解析を行ったものである。ひび割れ要素はアイソパラメトリック線要素を用いて表現し、ひび割れ幅に対する伝達応力関係を定義した。このひび割れ要素を用いて、無筋コンクリート梁の引張軟化および寸法効果に代表される非線形挙動を表現した。

**キーワード:** ひび割れ要素, 曲げひび割れ, 有限要素法, 破壊力学

## 1. はじめに

コンクリート構造物の各種力学的挙動解析において、ひび割れなどの局所的な現象を如何に解析に取り入れるかは重要な問題である。従来の有限要素法解析ではこれらの現象を(1)分布ひび割れモデル(smearred crack)や(2)リンク要素やロッド要素<sup>1)</sup>等の離散ひび割れモデル(discrete crack)によって表現している。(1)は要素特性を変化させてひび割れを表現する方法で、広く一般的に用いられている。(2)は逐次発展するひび割れを表現するために各段階での再メッシュ分割が必要となり、既存のひび割れのモデル化に適している。

著者らは、2次元解析でひび割れおよび付着を表現するためのアイソパラメトリック線要素を提案し、この要素を一定の条件に達した箇所に逐次導入し、再メッシュ分割を行うプログラムを開発した<sup>2)</sup>。この手法によると鉄筋コンクリートのひび割れ進展の解析が可能であるが、本研究では、提案しているひび割れ要素の特性を検討するために、無筋コンクリート梁の曲げ載荷試験の解析を行い、曲げ強度の寸法依存性等の破壊力学的考察を実施したものである。

## 2. ひび割れのモデル化

### 2.1 コンクリートの引張軟化特性

本解析では、コンクリートを弾性体として扱い、コンクリートの引張軟化挙動は提案しているひび割れ要素の非線形性のみにより表現するという仮定に基づいて解析を行った。ひび割れ要素には、**図-1**に示すような①応力が引張強度に達し、破壊進行領域にある段階、②コンクリート中の微細ひび割れが次第に局所化し、伝達引張応力が徐々に低下する引張軟化段階、および③除荷・再載荷によって通常のコンクリートの引張応力が伝達されない除荷・再載荷パスを通る段階の3ケースに分けてコンクリートの引張軟化特性を導入した。

①はコンクリートの引張強度に到達した後、ひび割れを介して伝達される応力は低下するが、ある一定の応力を保持する段階である。この段

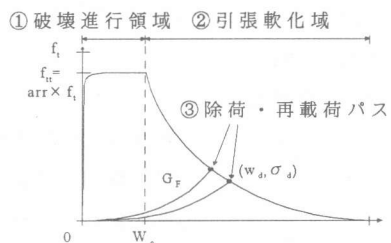


図-1 ひび割れ幅—伝達応力関係

<sup>\*1</sup> 立命館大学大学院 総合理工学専攻 工修 (正会員)  
<sup>\*2</sup> 立命館大学教授 理工学部土木工学科 工博 (正会員)  
<sup>\*3</sup> 立命館大学助教授 理工学部土木工学科 工博 (正会員)  
<sup>\*4</sup> 東京工業大学助手 工学部土木工学科 工修 (正会員)

階は破壊進行領域を1本のひび割れで表現するため、そして、ひび割れ要素挿入によるひずみエネルギーの解放を表現するために設定した。また、引張強度低下係数  $arr$  を定義して、破壊進行領域で使用する引張強度の値を  $f_{tt}=arr \times f_t$  とした。次に②の図-1の②引張軟化域に示す引張強度到達以降の引張応力の低下を表す曲線は引張軟化曲線と呼ばれ、軟化曲線下の面積がコンクリートの破壊エネルギー  $G_F$  となる。コンクリートの引張軟化曲線は、様々な研究者によってモデル化されており、代表的なものにリニアモデル、バイリニアモデル、および3乗モデルの3種類がある。本解析では、中でも比較的精度が良いと言われている3乗モデルを使用した。式(1)に本解析で用いた引張軟化曲線の関係式を示す。

$$\sigma = f_{tt}(1 + 0.5(w - w_0)f_{tt}/G_F)^{-3} \quad (1)$$

最後に③の除荷・再載荷パスでは、部材中に発生したひび割れは、一度あるひび割れ幅  $w_d$  に達した後、除荷によってひび割れ幅が  $w_d > w$  となった場合、一度到達したひび割れ幅  $w_d$  に達するまでは、本来のコンクリートの引張軟化曲線上は通らず、除荷パスを通らなければならない。このため、図-1の③除荷・再載荷パスに示すような、一度到達したひび割れ幅  $w_d$  に達するまでは、ひび割れ幅  $w_d$  でのコンクリートの引張伝達応力  $\sigma_d$  を最大値とする凹型をした二次曲線でモデル化した。式(2)に本解析で用いた除荷・再載荷パスの関係式を示す。

$$\sigma = \sigma_d(w/w_d)^2 \quad (2)$$

## 2.2 コンクリート要素

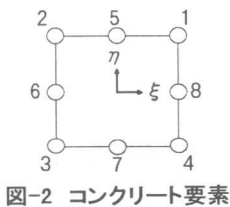


図-2 コンクリート要素

無筋コンクリート梁の解析を平面応力問題としてとらえ、コンクリートは弾性体・等方性材料として扱い、図-2に示すような8節点からなる2次のアイソパラメトリック四辺形要素を使用した。

## 2.3 ひび割れ要素

コンクリートに発生するひび割れは、図-3に示すように、ひ

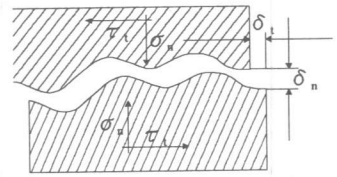


図-3 ひび割れ面での応力伝達

び割れ面に対して面接線方向のせん断応力  $\tau_t$ 、面法線方向の垂直応力  $\sigma_n$  が作用し、それぞれの方に  $\delta_t$ 、 $\delta_n$  だけ変位するような伝達応力-変位関係が成立しているものと仮定する。このひび割れを、全体座標系図-4(1)から局所座標系図-4(2)に変換したコンクリート要素間に張り付いた界面要素のような6節点からなる2次のアイソパラメトリック線要素として表現し、この要素を供試体モデル中の最大主引張応力点でコンクリートの引張強度に達したコンクリート要素間に順次導入した。ひび割れ要素の節点は、コンクリート要素の節点とそれぞれ共有している。

ひび割れ要素は、図-3に示すひび割れ要素の任意の点の応力と変位関係を用いて、式(3)のように定義できる。

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \tau_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{nn} & C_{nt} \\ C_{tn} & C_{tt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_n \\ \delta_t \end{Bmatrix} = C \delta \quad (3)$$

曲げひび割れの場合、ひび割れ間での応力伝達は、ひび割れ面の法線方向の  $\sigma_n$ - $\delta_n$  関係に大きく依存し、その係数  $C_{nn}$  の値に図-1に示すコンクリートの引張軟化特性を導入した。ま

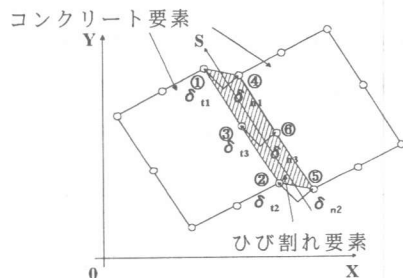


図-4(1) ひび割れ要素(全体座標系)

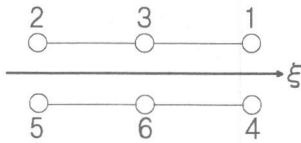


図-4(2) ひび割れ要素(局所座標系)

た、ひび割れ接線方向の  $\tau_1 - \delta_1$  を関連づける係数  $C_{tt}$  は定数として取り扱い、接線方向のすべりを拘束する程度の値を試行錯誤的に決定し、 $C_{tt} = 1.5 \times 10^3 (\text{N/mm}^3)$  とした。さらに、本解析ではモード I, II の混合モードを考慮せず、 $C_{tn} = C_{nt} = 0 (\text{N/mm}^3)$  とした。

ひび割れの要素の剛性マトリックス  $K_c$  は式(4)で表される。

$$K_c = \int_{-1}^1 B^T C B t ds$$

$$= \int_{-1}^1 B^T C B t \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} d\xi \quad (4)$$

- B: ひび割れ要素の任意点での変位と接点変位を結びつけるマトリックス
- t: ひび割れ発生位置のコンクリート厚さ

### 3. 解析概要

無筋コンクリートの曲げひび割れの進展、および寸法効果を的確に表現するひび割れ要素特性を検討するため、無筋コンクリート梁の中央一点荷重の曲げ試験解析を行った。梁の対称性を考慮して、梁の 1/2 のみの解析とした。本解析プログラムは、図-5 に示すフローチャートに従って構成されている。コンクリート要素のみの弾性段階での解析では、初めに任意の荷重を中央に荷重し、供試体中の最大主引張応力点を選び出す。次に、その点がコンクリートの引張応力に達するように荷重する荷重の増減を調整し、その点での最大主引張応力方向を計算し、その方向に対して直角にひび割れ要素を挿入して再メッシュ分割を行う。ひび割れ要素を1個挿入する毎に直接繰り返し法による繰り返し計算を行い、最大主引張応力がコンクリートの引

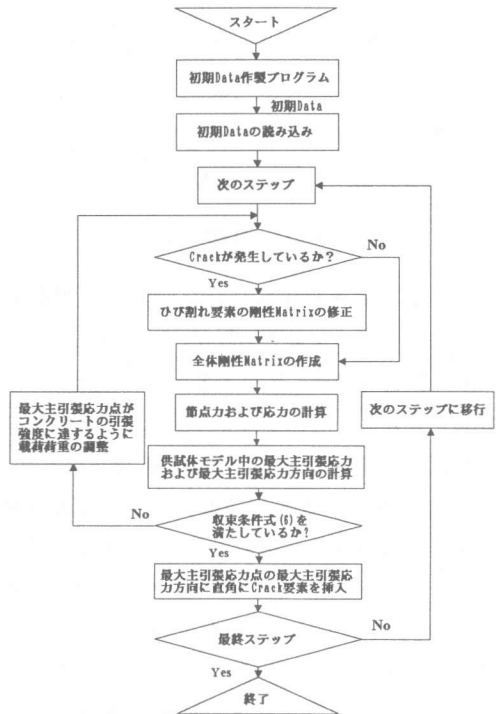


図-5 解析プログラムのフローチャート

張応力に達するように荷重する荷重の増減を調整し、荷重点での荷重が、式(5)の条件を満たすように収束計算を行う。収束条件を満たした後、新たにひび割れ要素を挿入して次のステップへ移行する。

$$(f_n - f_{n-1}) / f_n \leq 5.0 \times 10^{-5} \quad (5)$$

- $f_n$ : 荷重点での節点荷重
- n: 収束計算回数

### 4. 無筋コンクリート梁の解析

本研究で提案したひび割れ要素の妥当性を検討するために、 $10 \times 10 \times 40 (\text{cm})$  の供試体を用いて解析を行った。本解析で使用したコンクリートの材料特性を表-1に示す。また、 $G_F = 0.1 (\text{N/mm})$ ,  $\text{arr} = 0.9$ ,  $w_0 = 5.0 \times 10^{-5} (\text{mm})$  と一定値とした。

表-1 コンクリートの材料特性

| $f_c$<br>(MPa) | $f_t$<br>(MPa) | $E_c$<br>(MPa)    | $\nu$  |
|----------------|----------------|-------------------|--------|
| 30             | 3              | $3.0 \times 10^4$ | 0.1667 |

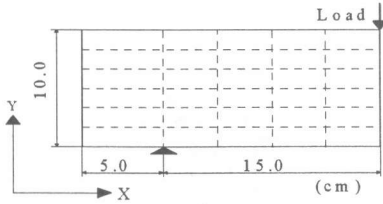


図-6 メッシュ分割 (5×6)

ひび割れ要素の1ステップ当たりの進展長さを決めるメッシュ分割数が、ひび割れ要素に与える影響について検討するため、モデル分割数を、3×4分割、5×6分割、5×8分割、8×10分割の4ケースについて解析を行った。図-6に、メッシュ分割の概要として5×6分割のケースを示す。図-7に解析結果として、4ケースのメッシュ分割数による各供試体の曲げ強度  $f_b$  を示す。モデル高さ方向のメッシュ分割数によって多少のばらつきがあるものの、ほぼ一定の値が得られた。図-8に5×6分割のケースでのひび割れ要素が進展していく過程で、解析モデル中央部でのコンクリート要素、ひび割れ要素の受け持つ伝達応力分布を示す。ひび割れ要素の先端部の応力はコンクリートが破壊進行領域に達している部分であり、伝達応力が0からコンクリートの引張強度まで大きく変化するために応力に乱れがあるが、以下のひび割れは引張軟化域に到達した部分であり、コンクリート要素とひび割れ要素の応力はほぼ一致しており各ステップでの収束が十分であることを示している。

次に、ひび割れ要素の非線形性を表現するひび割れ幅-伝達応力関係を定義するために用

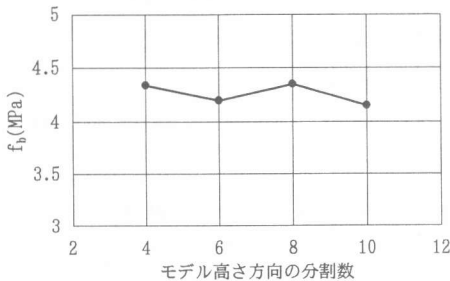


図-7 メッシュ分割数による曲げ強度の変化

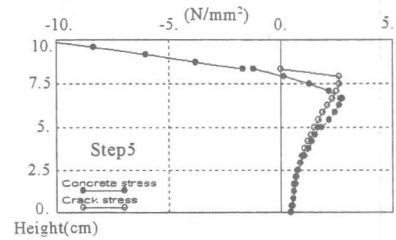
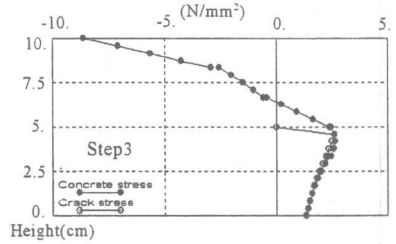


図-8 ひび割れの進展

いた係数が、供試体の挙動にどのような影響を及ぼすかを検討するため、2.1節で定義した  $arr$  および  $w_0$  の値を変化させて解析を行った。この時、供試体のメッシュ分割は、図-6に示す5×6メッシュ分割のものを用いた。

図-9より、 $arr$  を大きくすると荷重-載荷点変位曲線の最大荷重が大きくなった。 $arr$  が大きくなると伝達応力も大きくなるのは当然であるが、計算の収束性の問題より1.0に近づけることは困難であり、本解析では  $arr=0.9$  とした。

$w_0$  に関しては、荷重-載荷点変位曲線にはあまり影響を与えないが、図-10に示すように、供試体中に発生するひび割れ要素の場所に影響を与えた。 $w_0$  が小さい場合は、ひび割れは早い段階に引張軟化域に到達し、ひずみエネルギーの解放を始め、第二の曲げひび割れが発生し、ずにスパン中央上方向に進展していく。しかし、

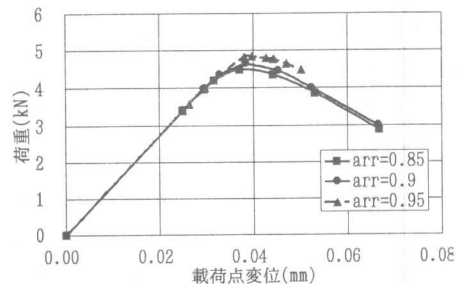


図-9  $arr$  の変化による荷重-載荷点変位

$w_0$  を大きくしていくと、ひび割れはしばらく破壊進行領域を進むため、大きな引張応力を伝達し続ける。このため、第二、第三の曲げひび割れが支点方向に発生したと考えられる。

以上の解析結果より、ひび割れ要素の使用により、ひび割れ幅-伝達応力関係が解析結果に忠実に反映されていることが確認できた。

### 5. 無筋コンクリートの寸法効果

寸法効果が的確にモデル化されていることを確認するために、 $10 \times 10 \times 40(\text{cm})$ の供試体、また、この寸法をを等倍に変化させた  $20 \times 20 \times 80(\text{cm})$ ,  $40 \times 40 \times 160(\text{cm})$ ,  $80 \times 80 \times 320(\text{cm})$ ,  $100 \times 100 \times 400(\text{cm})$ の5ケースの供試体を用いた。梁の曲げ強度  $f_b$  に影響を与えるパラメータとして、コンクリートの破壊エネルギー  $G_F$  が挙げられる。このパラメータを  $G_F=0.05, 0.1, 0.2(\text{N/mm})$ と3ケースに変化させて解析を行った。コンクリートの材料特性は、表-1と同様にした。また、 $\text{arr}=0.9$ ,  $w_0=5.0 \times 10^{-5}(\text{mm})$ と一定値とし、メッシュ分割に関しては、図-6に

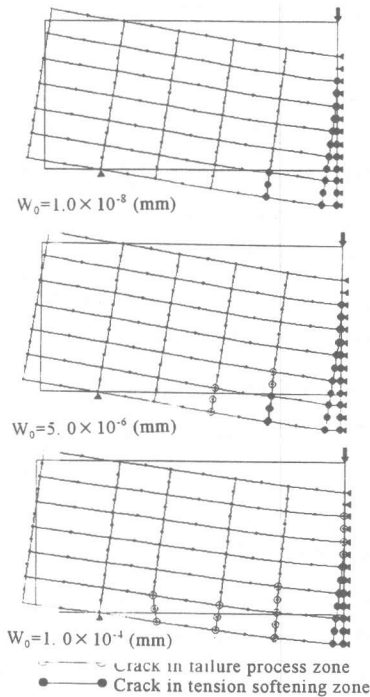


図-10  $w_0$  の変化によるひび割れの進展

示す  $5 \times 6$  分割を用いた。

$G_F$  の変化が供試体の寸法効果に与える影響として、図-11(1)に  $10 \times 10 \times 40(\text{cm})$ , および図-11(2)に  $100 \times 100 \times 400(\text{cm})$ の供試体の解析結果から得た荷重-載荷点変位を示す。 $10 \times 10 \times 40(\text{cm})$ のような小さい供試体では、 $G_F$  の変化に関係なく、スパン中央部へのひび割れ発生後もしばらくは荷重-載荷点変位曲線が上昇し続けている。しかし、 $100 \times 100 \times 400(\text{cm})$ のような大きい供試体では、コンクリートの引張強度が塑性域を超えたひび割れの発生によりスナップバックが発生し、その後の荷重-載荷点変位曲線が著しく低下している。本解析では、コンクリート内の最大主引張応力が引張強度に等しくなるように、強制的に荷重の増減を調整するという手法により進めた。この手法により、寸法の大きい供試体については、荷重と変位が一時的に減少するスナップバック現象が観察された。コンクリートの寸法の増大に伴い、破壊に要するエネルギーは、ひび割れ面に集中するために2次元的に増加するが、破壊時に供給されるエネルギーは3次元的に増加する。このような寸法効果の影響はひび割れが直接破壊に結

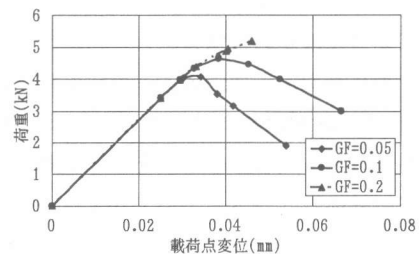


図-11(1) 荷重-載荷点変位  $10 \times 10 \times 40(\text{cm})$

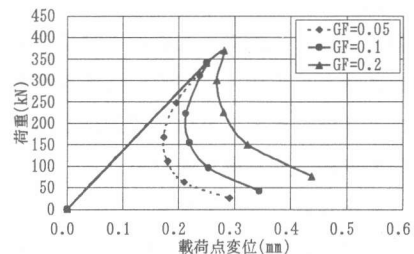


図-11(2) 荷重-載荷点変位  $100 \times 100 \times 400(\text{cm})$

び付く無筋コンクリートの場合、特に大きいことが予想される。本解析結果においても、寸法効果の影響を明確に表現することができた。

次に、破壊エネルギー  $G_F$  が寸法効果に与える影響を検討する。 $G_F$  は、ひび割れ幅が  $w_0$  に到達した以降の、ひび割れにより解放される供試体中のひずみエネルギーとして定義されているが、 $G_F$  が小さい時は5ケース全ての供試体において荷重-載荷点変位曲線の最大荷重が小さくなり、 $G_F$  が大きい時には最大荷重が大きくなる傾向があることが確認できた。

図-12 にコンクリートの破壊エネルギーの変化が供試体の曲げ強度の寸法効果に与える影響を示す。また、図中には、CEB-FIP MC90の曲げ強度の寸法効果式、式(6)も含めた。

$$\frac{f_b}{f_t} = \frac{1+1.5(h/h_0)^{0.7}}{1.5(h/h_0)^{0.7}}$$

$h$ : はり高さ,  $f_b$ : 曲げ強度  
 $h_0=100(\text{mm}), h \leq 1000(\text{mm})$  (6)

$G_F=0.2(\text{N/mm})$ を使用した解析結果は、式(6)の計算値とほぼ同様の曲げ強度となった。しかし、 $G_F=0.05, 0.1(\text{N/mm})$ で解析を行うと、式(6)の計算値よりも小さい曲げ強度となる。本解析では、 $\text{arr}=0.9$  と実際の引張強度の9割の値を使用しているため、曲げ強度が多少小さくなるが、 $G_F$ の変化が顕著に曲げ強度に現れるため、式(6)の様な寸法効果式には部材寸法のみならず、コンクリートの破壊エネルギーを考慮した項をもうける必要があると考えられる。

## 6. 結論

本研究は、無筋コンクリートの曲げひび割れの進展および寸法効果を的確に表現するため、ひび割れをモデル化するひび割れ要素を開発した。このひび割れ要素のみに非線形性を取り入れ、有限要素法による解析を行った。

本解析結果から、以下の結論を得た。

(1) 本研究では、ひび割れ幅  $\delta_n$  とひび割れ面に垂直な方向にひび割れを介して伝達される応

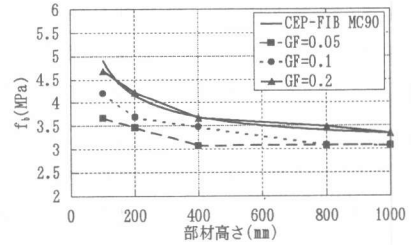


図-12  $G_F$ の変化による曲げ強度の変化

力  $\sigma_n$  の関係を非線形でモデル化したひび割れ要素を提案した。コンクリートに発生する曲げひび割れにアイソパラメトリックひび割れ要素を導入することにより、コンクリートの引張軟化現象をある程度表現できるものと考えられる。(2) ひび割れ要素の適用により、部材寸法の違いが解析結果に忠実に反映されていることが確認された。曲げ強度には  $G_F$  の変化が顕著に現れるため、寸法効果式には部材寸法のみならず、コンクリートの破壊エネルギーを考慮した項をもうける必要があると考えられる。(3) スナップバックは実際の実験や変位漸増法による解析でも確認されにくいですが、本解析では表現可能なことが確認できた。

## 参考文献

- 1) 二羽淳一郎：非線形ロッド要素を用いたコンクリートはりの曲げ強度寸法効果解析，コンクリート工学年次論文報告集，Vol.15, No.2, pp.75-80, 1993
- 2) 松尾真紀，児島孝之，高木宣章：有限要素法による鉄筋コンクリートはりのひびわれ解析，土木学会第52回年次学術講演会概要集，V-254, pp.508-509, 1997.9
- 3) 内田裕市，六郷恵哲，小柳治：コンクリートの曲げ強度の寸法効果に関する破壊力学的検討，土木学会論文集，No.442, V-16, pp.101-107, 1992.2
- 4) CEB:CEB-FIP model code 1990, pp.36.
- 5) 横山文彦，児島孝之，高木宣章，松尾真紀：ひび割れ要素を用いたコンクリートの曲げひび割れ特性に関する FEM 解析，土木学会第53回年次学術講演会概要集，V-508, pp.1016-1017, 1998.10