

論文 フリーメッシュ法によるコンクリートの引張軟化解析に関する研究

富山 潤*¹・伊良波 繁雄*²・矢川 元基*³・矢吹 哲哉*⁴

要旨:近年,新しい数値解析技術としてメッシュレス法の研究が,工学の様々な分野で盛んに行われている。メッシュレス法の一つでフリーメッシュ法(FMM)がある。FMMは有限要素法(FEM)をベースとしたメッシュレス法で解析データとしては節点情報だけが必要で,解析は節点単位で行う。本研究は,FMMをコンクリートの引張破壊の問題に適用する方法を示した。解析では,ひび割れモデルとしてひび割れ帯モデルを用いた。また,増分法としては,スナップバックのような不安定現象が生じた場合でも解析可能となるように動的釣合式である運動方程式を用いた。数値計算例としてコンクリート棒の直接引張試験とコンクリートはりの曲げ試験の解析を行い,良好な結果を得た。

キーワード:フリーメッシュ法,引張軟化特性,運動方程式,有限要素法,コンクリート

1. はじめに

近年,新しい数値解析技術として「要素を必要としない」あるいは「解析の過程で要素を意識させない」メッシュレス法の研究が,工学の様々な分野で盛んに行われている¹⁾。後者に属するメッシュレス法としてフリーメッシュ法(FMM)がある²⁾。FMMは,FEMをベースとし,節点単位で解析を行うので,解析データ作成が容易である。本研究は,FMMをコンクリートの引張軟化解析に適用するものである。

ひび割れモデルとしては,ひび割れ帯モデルを用いた。このモデルは,鉄筋コンクリート構造物のひび割れ進展を有限要素法を用いて解析する場合一般的に用いられている分布ひび割れモデルに破壊力学を考慮したエネルギー基準(引張軟化則を考慮)を導入したモデルである。

また,コンクリートは,引張破壊に対して極めて脆性的な破壊挙動を示すため,静的な釣合式を用いた増分解析は,最大荷重点付近およびそれ以降を解析するときスナップバックが生じると数値解析上不安定になりやすい。そのような問題を解く方法として弧長増分法やRmin法(山田の方法)を応用した増分法などがあるが,前者は,解析アルゴリ

ズムの複雑さ,後者は,引張軟化の進行や除荷が至る所で生じると安定して解が得られない場合がある。このため本解析では,増分方法として動的釣合式である運動方程式を用いた数値積分法(ニューマークの β 法)による増分法を用いた³⁾。

数値解析例として,両側切欠きを有するコンクリート棒の直接引張試験と中央切欠きを有するコンクリートはりの曲げ試験の解析を行い本解析法の妥当性を検討した。

2. フリーメッシュ法²⁾

2.1 基本的アルゴリズム

ここでは,FMMの基本的なアルゴリズムを簡単に示す。FMMは各節点(中心節点)ごとに,その付近の節点(衛星節点)を集めてローカルな領域で一時的に三角形要素を作り,これらの一時的な三角形要素の要素剛性行列から中心節点に寄与する行成分を集め,全体剛性行列を作成していくのでグローバルな要素生成を必要としない。具体的には,Fig.1のように,中心節点 l 付近にある衛星節点(m, n, o, p, \dots)を集め(中心節点 l の節点密度関数で定義される半径 R の領域),中心節点 l に対し

*1 琉球大学大学院 理工学研究科 工学修士 (正会員)

*2 琉球大学助教授 工学部環境建設工学科 工博 (正会員)

*3 東京大学教授 工学部システム量子工学科 工博

*4 琉球大学教授 工学部環境建設工学科 工博

時計または反時計まわりに並べ、中心節点 l を中心に一時的に三角形要素 (lmn, lno, lop, \dots) を作る。各三角形要素 (例 lmn) について有限要素法と同様に要素剛性行列 $[K_e]_{lmn}$ を作成し、 $[K_e]_{lmn}$ の中心節点 l に寄与する行成分のみを全体剛性行列 $[K]$ に足し込んでいく。得られた剛性行列をもとに連立一次方程式を解く方法は、従来用いられている直接法や反復法を用いることが出来る¹⁾²⁾。

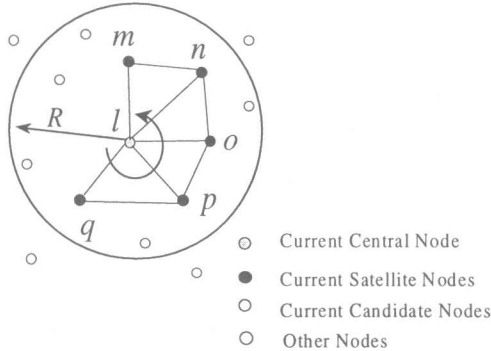


Fig.1 Local radial elements around node l

2.2 衛星節点の選択法

一時的な三角形要素を作る上でどの節点に関しても同じ三角形要素を作る必要がある。以下に最適衛星節点選択手法アルゴリズムを示す。

Fig.2 に示すように中心節点 l と衛星節点 (m, n, o) で形成される四角形の対角線 ($\overline{ln}, \overline{mo}$) の長さを比較して \overline{ln} が \overline{mo} より短ければ節点 n を中心節点 l の衛星節点として採用する (Fig.2(a) 参照), 逆に \overline{mo} が \overline{ln} より短ければ節点 n を中心節点 l の衛星節点から省く (Fig.2(b) 参照) という考え方を一般化した方法である。

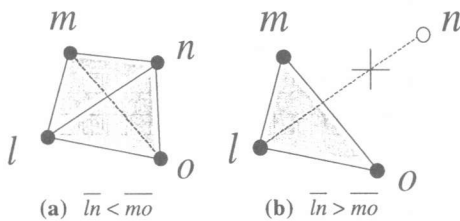


Fig.2 Select algorithm of satellite nodes

また、対角線の長さが等しい場合は、中心節点を座標原点としたときの第1, 3象限では、Fig.2(a)を

第2, 4象限では Fig.2(b)のパターンをそれぞれ採用した。

3. 解析方法

3.1 コンクリートのひび割れモデル⁴⁾

破壊力学を考慮したコンクリートのひび割れモデルとして、仮想ひび割れモデルとひび割れ帯モデルが代表的である。本解析手法は、ひび割れ方向を任意に求めることのできる Fig.3 に示すひび割れ帯モデルを用いた。また、Fig.4 のように引張軟化特性を考慮したモデルとして、引張応力-ひび割れ幅関係を2直線で表したモデルを引張応力-ひび割れ幅関係に置き換えたモデルを採用した。また、ひび割れは、最大主応力がコンクリートの引張強度に達すると最大主応力と直交する方向に生じるとした。

ひび割れ発生後の応力-ひび割れ関係は、Fig.3 に示す局所座標系 $n-t$ に対して式(1)を用いた。

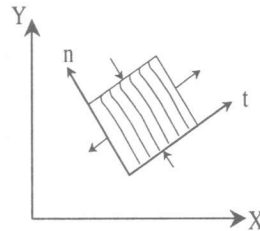


Fig.3 Idealization of a single crack

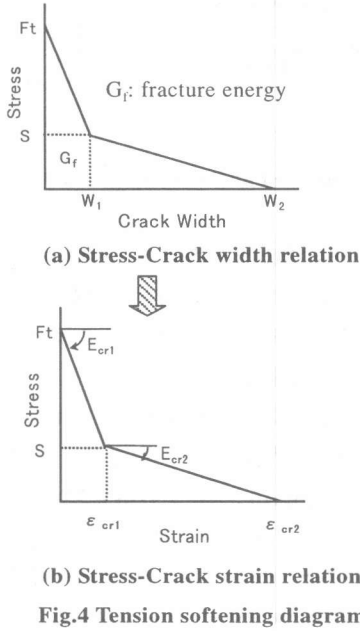
$$\begin{cases} d\sigma_t \\ d\sigma_n \\ d\tau_{tm} \end{cases} = \begin{bmatrix} E_{cr} & 0 & 0 \\ 0 & E_c & 0 \\ 0 & 0 & \beta'G \end{bmatrix} \begin{cases} d\epsilon_t \\ d\epsilon_n \\ d\gamma_{tm} \end{cases} \quad (1) \\ = [D_{cr}] \{d\epsilon\}$$

ここで、 E_{cr} は、ひび割れ発生後の引張軟化特性を示し、応力状態が軟化曲線の第一勾配時で $E_{cr} = E_c \cdot E_{cr1} / (E_{cr1} + E_c)$ 、第二勾配時で $E_{cr} = E_c \cdot E_{cr2} / (E_{cr2} + E_c)$ を用いる。 E_{cr1} 、 E_{cr2} は、それぞれ Fig.4(b) に示す軟化曲線の第一、第二勾配である。 E_c は、ヤング係数、 G は、せん断剛性係数、 β' は、せん断剛性低減係数で $\beta' = 0 \sim 1.0$ を用いた。また、ひび割れ要素の剛性マトリックス $[K_{cr}]_e$ は、全体座標系から局所座標系への応力、ひび割れ座標変換マトリックス $[T_\sigma]$ 、 $[T_\epsilon]$

を用いて X-Y 座標系に変換した式(2)を用いた。

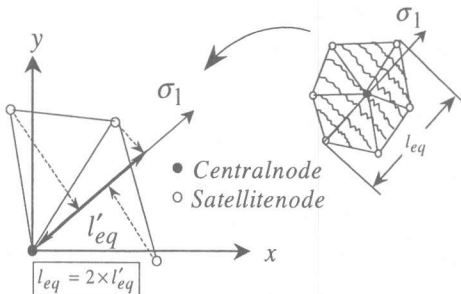
$$[K_{cr}]_e = \int_V [B]^T [T_\sigma]^{-1} [D_{cr}] [T_\epsilon] [B] dV \quad (2)$$

ここで、 $[B]$ は、ひずみ-変位マトリックスである。



また、FMM は、節点単位で計算するため、中心節点がひび割れ節点と判定された場合は、Fig.6(c)のように中心節点周りの要素に一樣にひび割れが生じるとして計算した。

ひび割れ帯モデルで問題となるのがひび割れの等価長さ l_{eq} である。本手法では、Fig.5 に示すように中心節点と衛星節点の距離を主応力 σ_1 方向に投影した長さ l'_{eq} の最大の2倍を等価長さとした。



3.2 中心節点の応力評価⁵⁾

FMM は、節点単位で計算するため、応力評価を要素単位から節点単位に変換する必要がある。本研究では、中心節点の応力を中心節点周りの要素の応力の平均値としているが、中心節点周りの要素パターンとして、Fig.6 のように3パターンが考えられる。パターン1とパターン3は、前述通りでよいが、パターン2では、中心節点周りの要素に健全要素とひび割れ要素が含まれる場合であり、その時の中心節点の応力は、健全な要素だけの応力の平均値を中心節点の応力とした。

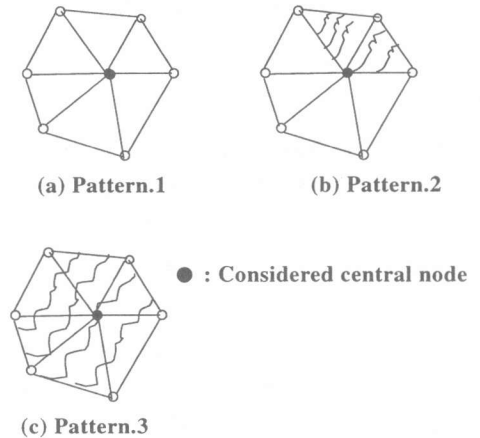


Fig.6 Element pattern around considered central node

3.3 増分方法

3.3.1 ニューマークのβ法による増分法

増分型運動方程式は、次式で表される。

$$[M] \{ \Delta \ddot{u} \} + [C] \{ \Delta \dot{u} \} + [K] \{ \Delta u \} = \{ \Delta P \} \quad (3)$$

ここで、 Δ は、増分記号、 P は荷重、 u 、 \dot{u} 、 \ddot{u} は、それぞれ変位、速度、加速度、 $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$ は、質量マトリックス、減衰マトリックス、剛性マトリックスである。

ニューマークのβ法は、線形加速度法を一般化したもので、時間間隔 Δt 内の加速度変化パラメータを β として表した式で、速度増分 $\{ \Delta \dot{u} \}$ 、加速度増分 $\{ \Delta \ddot{u} \}$ が式(4)(5)で表される。それらを式(3)に代入

して得られた式(6)が本解析に用いた基本式ある。

$$\{\Delta\dot{u}\} = \frac{1}{2\beta\Delta t} \{\Delta u\} + \frac{1}{2\beta} \{\dot{u}\} + \Delta t \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) \{\ddot{u}\} \quad (4)$$

$$\{\Delta\ddot{u}\} = \frac{1}{\beta\Delta t^2} \{\Delta u\} + \frac{1}{\beta\Delta t} \{\dot{u}\} + \frac{1}{2\beta} \{\ddot{u}\} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{\beta\Delta t^2} [M] + \frac{1}{2\beta\Delta t} [C] + [K] \right] \{\Delta u\} \\ & = \{\Delta P\} + [M] \left\{ \frac{1}{\beta\Delta t} \{\dot{u}\} + \frac{1}{2\beta} \{\ddot{u}\} \right\} \\ & + [C] \left\{ \frac{1}{2\beta} \{\dot{u}\} + \left(1 - \frac{1}{4\beta}\right) \Delta t \{\ddot{u}\} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

なお、減衰項は無視し、 $\beta = 0.5$ としている。

3. 2. 2 解析方法

増分計算は、時間間隔 Δt 毎に計算する方法で、各増分の段階で、節点の最大引張主応力が、引張強度に達したかを判定し、引張強度を越えた後から、軟化を考慮した $[D_{cr}]$ マトリックスを用いて増分解析を行った。今回の解析では、除荷は考慮していない。なお、時間増分 Δt は、解析対象構造物の固有周期 T を参考にして決めている。

4. 数値解析例

4. 1 両側中央切欠きを有するコンクリート棒の直接引張試験

本解析方法の引張軟化解析に対する妥当性を検討するために、両側切欠きを有する長方形断面のコンクリート棒2ケースの解析を行った。Fig.7 に解析に用いた供試体の寸法と節点分布を示す。また、Table.1 にコンクリート棒の材料特性を示す。

Table.1 Property of concrete bars

	No.1(Non-Snapback)	No.2(Snapback)
弾性係数(N/mm ²)	39270.0	18000.0
引張強度(N/mm ²)	3.2	3.4
破壊エネルギー(J/m ²)	103.1	59.3
重力加速度(mm/sec ²)	9800.0	9800.0
単位容積重量(t/m ³)	2.3	2.3
固有周期(sec)	7.73e-5	1.142e-4
引張軟化曲線モデル	1/4model	1/3model

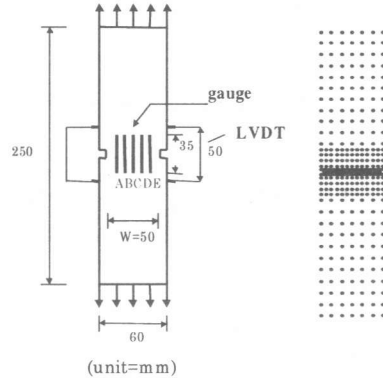


Fig.7 Specimen and distribution of nodes(331)

No.1(普通の軟化時の検討): Cornelissen ら⁶⁾が行った直接引張試験の実験値との比較。

No.2(スナップバックが生じた場合の検討): Rots ら⁷⁾が行った解析値との比較。

次に、解析結果を示す。Fig.8 に No.1 の切欠き線上の平均応力 σ とエクステンソメータの伸びとの関係および Fig.10 に No.2 の切欠き線上の平均応力 σ と全体の伸びとの関係を、また、Fig.9、Fig.11(a)(b)に No.1, No.2 の増分のある平均応力 σ 段階での切欠き線上の主応力分布の変化を示す。また、せん断剛性低減係数 β' は、0.4 を用いた。なお、No.1, No.2 の両解析に用いた時間増分 Δt 、強制変位増分 Δu は、Table.2 の通りとなっている。

Table.2 Δt , Δu used for analysis

No.1	Δt	Δu
弾性領域	T	$u \times 4$
軟化第一勾配時	T	$u \times 4$
軟化第二勾配時	T	$u \times 4$
No.2		
弾性領域	T	$u \times 20$
軟化第一勾配時	$T / 20$	u
軟化第二勾配時	$T / 12$	$u / 5$

T : 固有周期 (Table.1 参照), $u = 1 \times 10^{-4}$ (mm)

Fig.8 より、本解析結果 (No.1) が Cornelissen らの行った実験結果との一致が良好であることがわかる。また、Fig.9(a)は、ひび割れ直前までの応力分布の変化を示した図で、両切欠き先端に応力が集中し、切欠き先端からひび割れが生じる様子を良くとらえ

ている。また、Fig.9(b)は、ひび割れ後の応力分布の変化を示した図で、切欠き線上全体にひび割れが生じ、応力が低下する様子を良くとらえている。

Fig.10より、本解析結果(No.2)は、最大応力後、急激に応力が低下したのち多少振動しているが、スナップバックが生じる問題においても複雑なアルゴリズムを用いることなく解析できることがわかった。その振動は、減衰マトリクスを考慮することや解析条件を変えることで押さえることができると考えられる³⁾。Fig.11(a)(b)に切欠き線上での主応力分布の変化を示す。No.1同様、ひび割れ発生から進展過程の応力状態を良く表している。

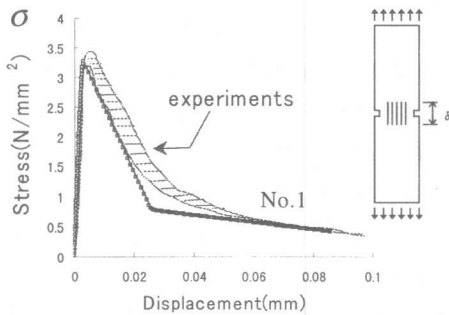
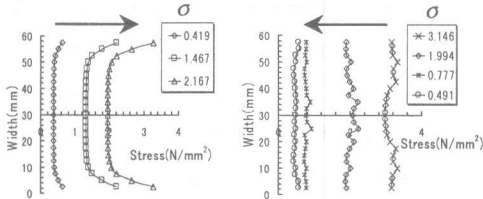


Fig.8 Average stress-average displacement



(a) Elastic (b) Softening

Fig.9 Distribution of principal stress(No.1)

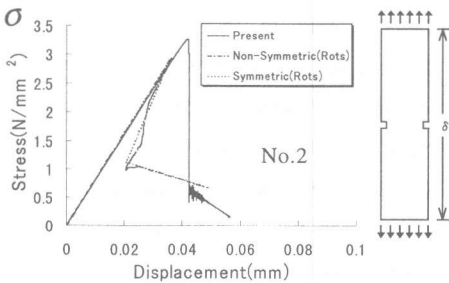
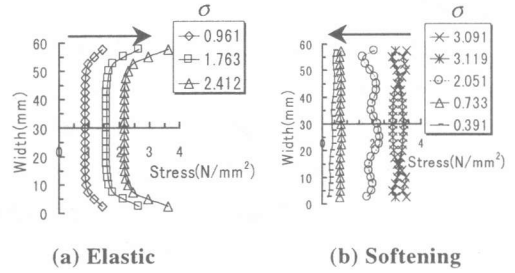


Fig.10 Average stress-average displacement

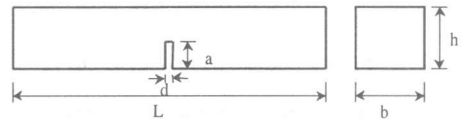


(a) Elastic (b) Softening

Fig.11 Distribution of principal stress(No.2)

4.2 中央切欠を有するコンクリートはりの曲げ破壊解析

ここでは、4.1の応用として曲げ破壊が支配的な問題の解析例として Fig.12 に示す無筋コンクリートはりに中央集中荷重 P が作用する場合のひび割れ進展の解析を行い、六郷ら⁸⁾が行った実験結果と本解析結果を比較する。Fig.13 に節点分布を示す。また、コンクリートの材料特性を Table.3 に示す。



$L=800\text{mm}, h=100\text{mm}, b=100\text{mm}, a=50\text{mm}, d=5\text{mm}$

Fig.12 Notched beam and size

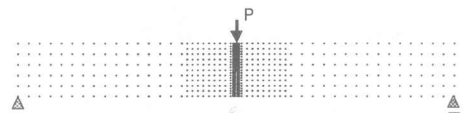


Fig.13 Distribution of nodes(595)

Table.3 Property of concrete beam

弾性係数 E_c (N/mm^2)	39224
引張強度 f_t (N/mm^2)	3.33
ポアソン比 ν	0.2
破壊エネルギー G_f (N/mm)	0.190
固有周期 T (sec)	5.5×10^{-3}

$\Delta t = T, u = 1 \times 10^{-4} \text{ (mm)}, \beta' = 0.001$

次に解析結果を示す。Fig.14 は荷重-載荷点変位を示したものである。この図より本解析結果は、実験結果に比べ最大荷重で約 9%程度高めではあるが、曲線の立ち上がりや荷重変位曲線の形状

は、ほぼ一致していると言える。

Fig.15 は、解析過程の4つの荷重段階(81.78N, 425.09N, 1205.94N, 835.86N)での切欠き線上の水平応力変化とその荷重時に対応した切欠き付近のひび割れ進展(節点中心を通るように表示)を示したものである。Fig.15(a)(b)より、ひび割れは切欠き先端から発生し、ほぼ垂直に進展していく様子がわかる。これより、本解析法は引張ひび割れ進展に対するシミュレーションも可能であることがわかる。

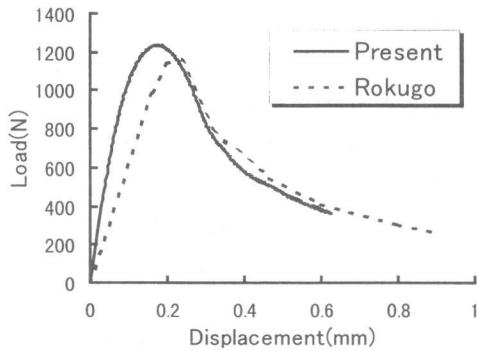
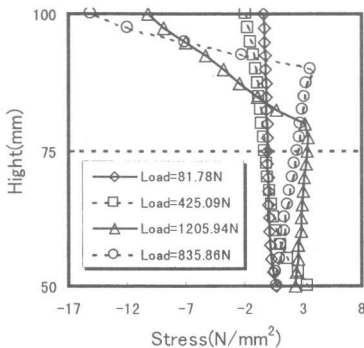
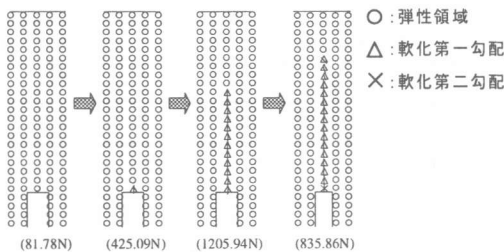


Fig.14 Load-Displacement curve



(a) Distribution of stress



(b) Progress crack growth of notched region

Fig.15 Fracture process of notched beam

5. まとめ

本研究は、FMM を用いたコンクリートの引張軟化に対する増分解手法を示した。結果をまとめると以下の通りとなり、本解析法の妥当性が示された。

- 1) 無筋コンクリートの直接引張試験の解析から、普通の引張軟化問題、さらにスナップバックが生じる問題でも解析可能であることを示した。
- 2) はりの曲げ問題の解析では、引張ひび割れの進展をシミュレーション出来ることを示した。

今後は、除荷や圧縮領域での塑性等を考慮する予定である。

参考文献

- 1) 矢川元基, 酒井謙:メッシュレス計算手法, 機械の研究, 第49巻第1号, pp.103-110,1997.
- 2) 山田知典:フリーメッシュ法の並列化, 東京大学修士論文, 1997.
- 3) 富山潤:新しい増分解法によるコンクリートの引張破壊挙動の解析, 琉球大学修士論文, 1997.
- 4) 日本コンクリート工学協会:破壊力学の応用研究委員会報告書, 1993.10
- 5) 富山潤, 伊良波繁雄, 矢川元基, 山田知典:フリーメッシュ法を用いたコンクリートの引張破壊解析, コンクリート工学年次論文報告集, Vol.20, No.3, pp.151-156, 1998.
- 6) Cornelissen.H.A.W,Hordijk.D.A,Reinhardt.H.W :Experiments and Theory for the Application of Fracture Mechanics to Normal and Lightweight Concrete, F.H.Wittman,Elsevier, pp.55-575,1986
- 7) J.G.Rots: Computational Modeling of Concrete Fracture, pp66-74,1988.
- 8) Rokugo, K., Iwasa, M., Suzuki,T. and Koyanagi, w.: Testing Methods to Determine Tensile Strain Softening Curve and Fracture Energy of Concrete, Fracture Toughness and Fracture Energy, ed. H. Mihashi et et al., Balkema, pp.153-163, 1989.