

論文 長大スパンコンクリートアーチ橋の非線形動的解析

姫野 正太郎^{*1}・田邊 忠顕^{*2}

要旨：従来，はりの解析においては微小変形理論に基づきせん断変形が無視されるのがほとんどであったが，本研究で対象とする長スパン構造では，材料学的また幾何学的非線形要因を慎重にかつ出来るだけ正確に考慮する必要がある．そこで，せん断変形を考慮に入れた 3 次元 12 自由度はり要素の非線形有限変形の定式化を行い，FEM 解析を行えるようにし，未知のスパン長である 600mアーチ橋について適用した．そこでモデル橋に対し，構造不安定問題の検討，固有値解析を通して，解析上の構造特異点，bifurcation point で起こりうる現象の推定などを通して，実設計の可能性を探った．

キーワード：bifurcation point, 600mスパン, ティモシェンコはり, 固有振動解析

1. はじめに

コンクリート構造として本質的に優れていると考えられるアーチ橋を対象とし，実存する最長スパンを大きく超えるアーチ橋を建設するとすれば，実際上どのような構造上の問題が生じるか検討を行うことにした．

従来，RC構造物の解析においては，微小変形理論を用いるのが通例で，有限変形理論は用いられていない．また，はりの解析においてはせん断変形が無視されるのがほとんどであった．しかし，本研究で対象とする長スパン構造では，ありとあらゆる非線形要因を慎重にかつ出来るだけ正確に考慮する必要がある．そこで，せん断変形も考慮に入れた非線形有限変形の有限要素定式化を行い，モデル橋に対し，構造不安定問題の検討，固有値解析を行った．

2. 非線形有限変形はり要素剛性の定式化

3次元の 12 自由度はり要素を図-1 に示す座標系に置き，せん断変形を考慮したはり要素剛性の定式化を考える．X, Y, Z 方向の変位増分を $U(x, y, z)$, $V(x, y, z)$, $W(x, y, z)$ と変形前の座標で表すと，ティモシェンコのはり

り理論では，曲げ変形成分およびせん断変形成分を用いて次のように表される．

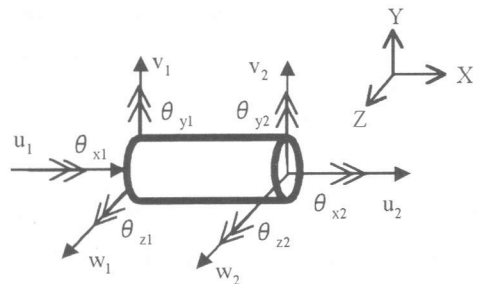


図-1 3次元12自由度はり要素

$$\begin{aligned}
 U(x, y, z) &= u + y \frac{\partial v_b}{\partial x} - z \frac{\partial w_b}{\partial x} \\
 V(x, y, z) &= v = v_b + v_s \\
 W(x, y, z) &= w = w_b + w_s
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

u ：軸力による軸方向変位増分

v_b, w_b ：曲げによるたわみ変位増分

v_s, w_s ：せん断力によるたわみ変位増分

式(1)の変位場において，変形前の座標によって微少になる項を省略して表すと，グリーン歪の軸ひずみ，せん断ひずみ増分が，次式のようなになる．

^{*1} 名古屋大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (正会員)

^{*2} 名古屋大学教授 工学研究科土木工学専攻 工博 (正会員)

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial^2 v_b}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_b}{\partial x} + \frac{\partial v_s}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v_s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (2)$$

せん断変形によるはりのたわみ増分 v_s, w_s は、力の釣り合いを考慮することにより、曲げによるたわみ増分 v_b, w_b と次のような関係にある。

$$\begin{aligned} GA_y \frac{dv_s}{dx} &= -\frac{dM_z}{dx} = -EI_y \frac{d^3 v_b}{dx^3} \\ GA_z \frac{dw_s}{dx} &= -\frac{dM_y}{dx} = -EI_z \frac{d^3 w_b}{dx^3} \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)のEIは曲げ剛性、GAはせん断剛性である。このせん断剛性を考慮することによりはり部材のせん断変形を考慮することができる。RC部材ではクラック発生状況などにより大きく変化する。

式(3)が曲げによるたわみ増分 v_b, w_b の3階微分方程式なので、各変位増分 u, v, w を変形前の座標 x の3次多項式と仮定する。

$$\begin{aligned} v_b(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \\ w_b(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \end{aligned} \quad (4)$$

式(4)を用いて、式(3)の関係式を満たすように各変位増分の変位関数を決定する。それぞれの変位増分およびその変位関数は次のように表される。

$$\begin{aligned} u &= [N_u] \{\delta u\} \\ v_b &= [N_{v_b}] \{\delta v\} & w_b &= [N_{w_b}] \{\delta w\} \\ v_s &= [N_{v_s}] \{\delta v\} & w_s &= [N_{w_s}] \{\delta w\} \\ \{\delta u\}^T &= [u_1, u_2] & \{\delta v\}^T &= [v_1, \theta_{y1}, v_2, \theta_{y2}] \\ \{\delta w\}^T &= [w_1, \theta_{z1}, w_2, \theta_{z2}] \end{aligned} \quad \text{以上 (5)}$$

$$[N_u] = \frac{1}{L} [L - x, x]$$

$$\begin{aligned} [N_{v_b}] &= \frac{1}{1+T_y} \cdot \frac{1}{L^3} [L^3 + 6k_y L - 3Lx^2 + 2x^3, \\ &\quad -12k_y^2 - 4k_y L^2 + (12k_y L + L^3)x \\ &\quad - (6k_y + 2L^2)x^2 + Lx^3, \\ &\quad -6k_y L + 3Lx^2 - 2x^3, \\ &\quad 12k_y^2 - 2k_y L^2 + (6k_y - L^2)x^2 + Lx^3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [N_{w_b}] &= \frac{1}{1+T_z} \cdot \frac{1}{L^3} [L^3 + 6k_z L - 3Lx^2 + 2x^3, \\ &\quad 12k_z^2 + 4k_z L^2 - (12k_z L + L^3)x \\ &\quad + (6k_z + 2L^2)x^2 - Lx^3, \\ &\quad -6k_z L + 3Lx^2 - 2x^3, \\ &\quad -12k_z^2 + 2k_z L^2 - (6k_z - L^2)x^2 - Lx^3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [N_{v_s}] &= \frac{1}{1+T_y} \cdot \frac{1}{L^3} [6k_y L - 12k_y x, \\ &\quad 12k_y^2 + 4k_y L^2 - 6k_y Lx, -6k_y L + 12k_y x, \\ &\quad -12k_y^2 + 2k_y L^2 - 6k_y Lx] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [N_{w_s}] &= \frac{1}{1+T_z} \cdot \frac{1}{L^3} [6k_z L - 12k_z x, \\ &\quad -12k_z^2 - 4k_z L^2 + 6k_z Lx, -6k_z L + 12k_z x, \\ &\quad 12k_z^2 - 2k_z L^2 + 6k_z Lx] \end{aligned}$$

$$T_y = \frac{12}{L^2} k_y, \quad T_z = \frac{12}{L^2} k_z, \quad k_y = \frac{EI_y}{GA_y}, \quad k_z = \frac{EI_z}{GA_z}$$

以上(6)

$\{\delta u\}, \{\delta v\}, \{\delta w\}$ は軸方向および断面方向の増分変位ベクトルであり、図-1にある両節点のたわみ増分およびたわみ角増分を成分として表される。

また、はり要素のねじり変形については St. Venant の理論に従い、ねじり率 $d\theta_x/dx$ が一定であり、ねじりモーメント M_x に比例すると考える。

$$M_x = GK \frac{d\theta_x}{dx} \quad (7)$$

式(7)のGKはねじり剛性であり、せん断剛性Gとねじり定数Kの積である。このように考えることによって、ねじり方向のひずみ、変位増分、変位関数はつぎのようになる。

$$\gamma_{yz} = \sqrt{y^2 + z^2} \cdot \frac{d\theta_x}{dx}$$

$$\theta_x = [N_\theta] \{\delta\theta_x\}$$

$$\{\delta\theta_x\}^T = [\theta_{x1}, \theta_{x2}] \quad (8)$$

$$[N_\theta] = \frac{1}{L} [L - x, x]$$

ここで、はり要素の有限変形理論による仮想仕事方程式を考える。変形解析を変位制御で行うことにし、そのステップ直前迄に生じていた部材の応力をコーシー応力に変換し、新たに部材座標を定め直した後の状態において、それ以前までの荷重状態により生じている応力、ひずみ、変位を上付き文字 0 で表し、微少な荷重増分により生じる応力、ひずみ、変位の各増分、式 (2)、(8) 及び表面力 f を用いて、仮想仕事方程式を表すと次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta W = & \iiint \left\{ (\sigma_x^0 + \sigma_x) \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial^2 v_b}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \right) \right. \\ & + (\tau_{xy}^0 + \tau_{xy}) \delta \left(\frac{\partial v_s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ & + (\tau_{zx}^0 + \tau_{zx}) \delta \left(\frac{\partial v_s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ & \left. + (\tau_{yz}^0 + \tau_{yz}) \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \right\} dV \quad (9) \\ & + \iiint \frac{1}{2} \left\{ \sigma_x^0 \delta \left(\frac{\partial v_b}{\partial x} + \frac{\partial v_s}{\partial x} \right)^2 \right. \\ & \left. + \sigma_x^0 \delta \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 \right\} dV \\ & + \iint \left\{ (f_x^0 + f_x) \delta u + (f_y^0 + f_y) \delta v + (f_z^0 + f_z) \delta w \right\} \end{aligned}$$

式 (5)、(8) を式 (9) に代入することにより、はり要素の剛性方程式を得られる。

$$([K] + [K_g]) \{\delta d\} = \{\delta F\} + \{\delta F_r\} \quad (10)$$

式 (10) の $\{\delta F_r\}$ は増分荷重を与える以前の状態における釣り合い方程式が完全に満たされないために生じる不平衡力である。また、 $[K]$ は構造物の微小変位の剛性マトリクス、 $[K_g]$ は幾何剛性マトリクスであり、式 (9) の第 1 項、第 2 項に対応している。 $([K] + [K_g])$ を合わせて接線剛性マトリクスである。

せん断変形の影響は GA の値によって剛性マ

トリクスに反映される。せん断剛性が無限大に大きければ、せん断変形を全く生じないことになり、曲げ変形のみを考えた剛性マトリクスができる。以上のように本解析では、updated lagrange 法に従って、各変形段階で座標変換を行いながら、今までの定式化で得られた剛性マトリクスを計算している。

3. コンクリート、鉄筋の構成則

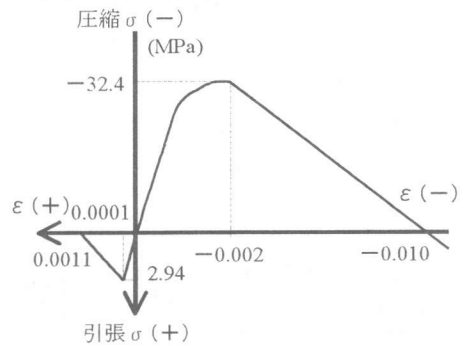


図-2 コンクリートの応力-ひずみ関係

本解析で用いたコンクリートの構成則は、Saenz の提案したモデルを参考にし、図-2 のように仮定した。引張降伏し、ひずみが 0.0011 以上のとき、ひびわれが生じる。圧縮荷重が作用しているときは、降伏点まで応力はひずみの 2 次式で表され、ひずみが -0.002 で圧縮降伏し、-0.010 で応力零の状態に至る。

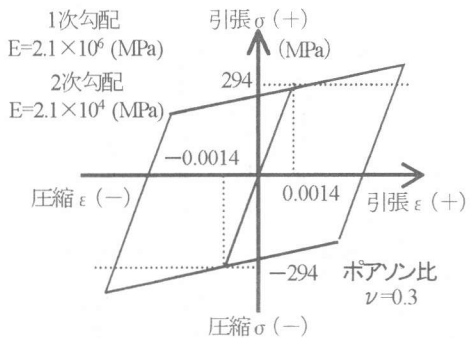


図-3 鉄筋の応力-ひずみ関係

本解析では図-3 に示すように引張側、圧縮側ともに、降伏点を超えると初期勾配の 1/100

の 2 次勾配で応力が上昇するバイリニア型の鉄筋の応力-ひずみ関係を用いた。除荷の場合には、降伏以前と同じ傾きで変形が進み、荷重単調増加時の降伏曲線の延長線上に交わるまで応力は減少し、それ以降、降伏曲線上を移動する。圧縮、引張強度は、294(MPa)とした。

4. 600mスパンモデルアーチ橋の概略設計

現在の世界最長スパンのアーチ橋は、ユーゴスラビア・チトー橋の 390m であり、日本では別府明礬橋の 235m である。また、現在我が国では富士川橋 (265m) が施工中である。世界最長スパンから更に 210m 長く、また日本の最長スパンよりも 365m 長い 600m のアーチ橋を考える。

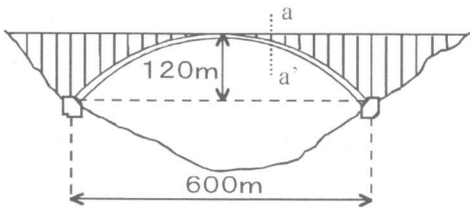


図-4 600mアーチ橋概観図

図-4 に示すようなモデルアーチ橋は、(株)ピー・エスで従来のアーチ橋の設計経験に基づいて概略計算されたものであり、詳細な設計はなされていない。アーチの軸線形状は、cosine hyperbolic 曲線関数で得られる。

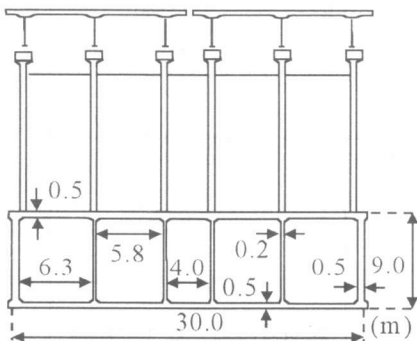
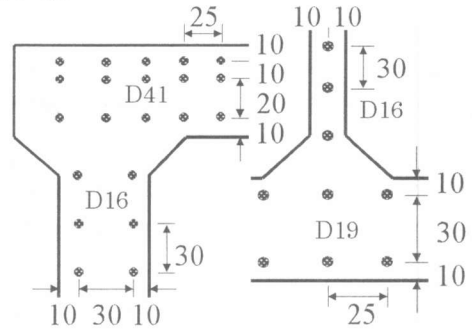


図-5 モデルアーチ橋の断面図 (a-a')

図-4 の a-a'部分のアーチ断面形状を図-

5に示す。5室 BOX 断面になっており、アーチスプリングングからクラウンにかけて、断面の厚みが 12m から 6m に一定の割合で変動している。



<上板及び側板> <下板及び側壁>

図-6 鉄筋の配置

また、断面内の鉄筋の配置状態を図-6 に示す。アーチリブの断面に主鉄筋として、上板に D41 を鉛直方向に 3 本、それを水平方向に 25cm 間隔で並べ合計 357 本、下板に D19 を鉛直方向に 2 本それを水平方向に 25cm 間隔で並べ 238 本、側板に D16 を 30cm 毎に 2 本ずつ、隔壁に D16 を 30cm 毎に 1 本ずつ配置されている。

5. モデル橋の不安定解析

構造物の安定性の条件は、内力による仕事か外力による仕事より大きいことである。任意時間におけるひずみ速度ベクトルに対して、力の釣合いや慣性項はゼロになることを考慮すると、次式の静的構造物安定条件が求まる。

$$\det\{[K]+[K_g]\}=0 \quad (11)$$

本解析上では式 (11) から得られる固有値 λ が正から負に変わることによって臨界点の判断をしている。また、臨界点での性質として、式 (12) のうち必ずどちらかひとつが成り立つのが特徴である。

$$\dot{u}=0 \quad \{v_i\}^T \{f\}=0 \quad (12)$$

$\{v_i\}$: 固有ベクトル $\{f\}$: 荷重ベクトル

式 (12) の前者が成り立つときの臨界点は、limit

point と呼ばれ、構造物に荷重を作用させたときの荷重変位曲線の最大荷重点がそれに当たる。式 (12) の後者が成り立つときは、bifurcation point であり、固有ベクトルと荷重ベクトルが直交している。この性質は固有モードで確認することができる。

モデルアーチ橋の境界条件として、塑性ヒンジ効果を考慮するため、両端固定端、両端ヒンジの場合の 2 通りを考える。また、設計断面から得た全断面有功としてのねじり剛性値のほかに、ねじり剛性の評価をその 1/100, 1/200 とした場合を考え、境界条件と組み合わせて不安定解析を行った。荷重は、アーチリブのみで、アーチリブ上の柱、桁のない状態に、鉛直荷重のみを変位制御で与えた。アーチ頂部を変位制御点として、アーチ橋全体に死荷重の比率と同様の割合で徐々に荷重増加するように制御した。両端ヒンジであるモデル橋のアーチ頂部に関する荷重-変位曲線と負の固有値の出現状況を図-7に示す。

両端固定、両端ヒンジどちらの場合も負の固有値は、十分なねじり剛性(GK)がある場合は最高荷重のときに 1 個、その直後の断面が降伏し荷重が降下し始めたときに 2 個目を得た。小さいねじり剛性(両端固定では GK/200, 両端ヒンジでは GK/100)の場合は最高荷重に達するかなり前の荷重が単調増加している途中で 1 個、ねじり剛性が大きいときと同様に断面降伏し荷重が降下し始めたときに 2 個目を得た。

固有値が零、数値解析上では最初の負の固有値が生じる時点は 2 つに分類できる。1 つは、荷重増分が正から負になる間に、固有値が零になる点が存在する。この点は limit point と呼ばれ、最大荷重点がそれに当たる。また、荷重ベクトルと固有ベクトルが直交する関係にある点でも負の固有値が生じ、このような点は bifurcation point(分岐点)と呼ばれ、fundamental path(基本的な変形経路)と異なる bifurcation path(分岐経路)が存在し、その発端となる点である。

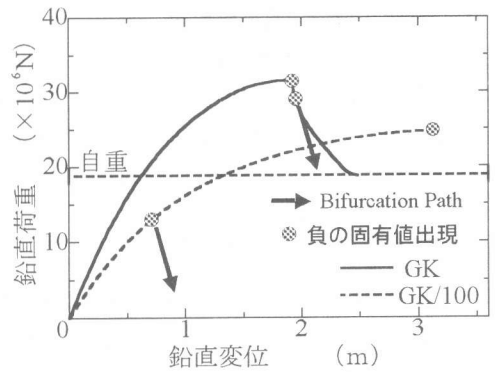


図-7 負の固有値の出現状況(両端ヒンジ)

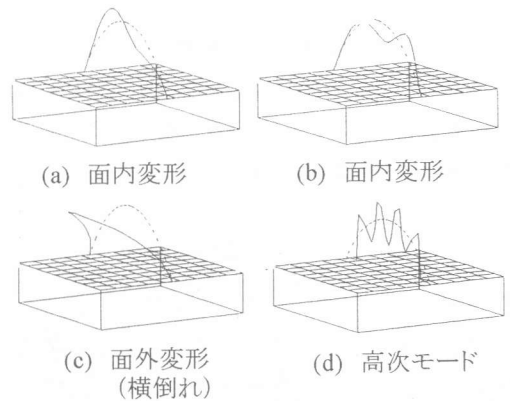


図-8 主な固有モード

このような観点から解析結果を見ると、両端ヒンジ、GK/100 の条件では早期に面内座屈である図-8の(a)のような固有モードで変形分岐することが示されている。同様のことが両端固定、GK/200 の場合にも示されている。また、仮にこの荷重を通り越したとしても、最大荷重は自重の 1.5 倍程度で最大耐荷力に達することが示された。さらに最大耐荷力以降は、負の固有値に対して(a), (b)の固有モードが示されており、よりエネルギー準位の低いモードとして(a)が示されている。

境界条件に関わらず共通することは、ねじり剛性を 1/100, 1/200 に小さくしたことによって、負の固有値が早期に出現し、非対称モードがそれに当たるので、早期の bifurcation point を確認できたことである。

6. モデル橋の固有振動解析

$$[M]\{\ddot{y}\} + ([K] + [K_g])\{y\} = \{0\}$$

$$\{y\} = \{u\}e^{i\omega t} \quad (13)$$

一般的な運動方程式およびその解である式(13)を解いていくと、次式が得られる。

$$[-\omega^2[M] + [K] + [K_g]] = 0 \quad (14)$$

式(14)を解くことにより求められるn次の固有周期、固有モードを見て、固有振動についての破壊状態の推定を行う。なお、一般的な解析では減衰に関する項を加えるが、振動荷重ではなく、単調増加の荷重を考えたので、減衰項は省略した。

両端固定端のモデルアーチ橋に鉛直荷重を単調載荷し、初期状態、自重載荷状態、終局状態で固有振動解析を行い、固有周期、固有モードを求めた。得られた固有周期をまとめると、表-1のようになった。

表-1 得られた固有周期

| | 1次周期(s) | 2次周期(s) | 3次周期(s) |
|---------|---------|---------|---------|
| 初期状態 | 7.8029 | 7.1519 | 3.8404 |
| 自重載荷状態 | 9.5006 | 9.1935 | 4.8380 |
| 終局状態 | 11.111 | 10.970 | 6.0173 |
| 等価質量の累計 | 0.004% | 0.084% | 0.084% |

| … | 11次周期(s) | … | 126次周期(s) |
|---|----------|---|-----------|
| … | 0.903 | … | 2.52E-03 |
| … | 1.04 | … | 2.91E-03 |
| … | 1.15 | … | 3.69E-03 |
| … | 48.127% | … | 100.00% |

得られた固有周期は最大で7.8(s)で、かなり長周期となった。解析が進むに連れて、より固有周期がさらに長くなっていった。600mスパンアーチ橋は、構造物としては大きい部類に入るものであるため、周期が大きくなったと思われる。実構造物として実現するために考慮する必要があるのは、長周期側からの0.1秒前後のものまでであるため、この解析では57個あまりの固有モードを取り上げて考える必要がある。また、次数の高い固有モードは、例えば、周期が0.1s程度のとき、図-8の(d)のモードとなっている。臨界点あるいは分岐点近傍における振動性状については、理論的に長周期の固有モードが表れるが、動的外力が作用している場

合にそれが直ちに破壊に結びつく事はないと考えられるが、一層の理論的検討が必要である。

7. モデル橋の耐震性

6章の解析の終局状態において刺激係数 β_s 、等価質量 \bar{M}_s を求め、等価質量の累計などから各モードに対して算出する設計震度を求めた。

検討基準となる等価質量の和が全質量の90%以上となる次数は116次となり、かなり多くの次数の検討が必要であるという結果になった。また、設計震度は0.1~0.2の範囲で求め、道路橋示方書の設計基準を満たすためには、最大0.2Gの慣性力に耐えることが必要である。だが、自重載荷状態のモデル橋は、図-9の荷重-変位曲線のように、0.11Gまでの水平耐荷力しかなく、現在の示方書の設計基準に満たしていない。

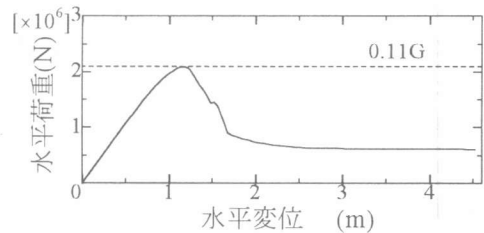


図-9 モデル橋の水平耐荷力

8. 結論

600mアーチ橋に対して非線形分岐解析を行い、過早な座屈の可能性、最大荷重点付近での破壊モード、水平耐荷力の不足などがわかり、頂部の強化の必要性がわかった。だが600mスパンアーチ橋の実設計の可能性は、地震動への対応などを含め、より一層の検討が必要である。

<<参考文献>>

- 1) 柴田明徳：最新耐震構造解析，森北出版株式会社，1981
- 2) 社団法人日本道路協会：道路橋示方書・同解説 V 耐震設計編，1997
- 3) 中村光：コンクリート構造のポストピーク挙動に関する解析的研究，名古屋大学博士論文，1992