

論文 フレキシビリティ法を用いた RC はりの解析

木全 博聖^{*1}・チア ホン^{*2}・田邊 忠顕^{*3}

要旨: フレキシビリティ法の特徴は、はり要素内の荷重の直線分布を規定して求めたフレキシビリティマトリクスから要素剛性マトリクスを算出するところにある。荷重が交点のみに作用するような構造物を解析する際には要素を大幅に削減することができ、高い収斂性も期待できる。ここでは本手法の定式化を行い、さらにRCラメンの実験を解析的に評価することにより、その可能性を示した。

キーワード: フレキシビリティ法, 剛性法, モーメントの直線分布, ファイバーモデル

1. はじめに

フレキシビリティ法は、バークレーの研究グループにより提案されているはりの有限要素解析手法である¹⁾。一般的に用いられる剛性法との違いは、図-1に示すように剛性法がはり要素内の変形の近似関数をあらかじめ与えるのに対し、フレキシビリティ法は変形の近似関数を与えずに、要素内のモーメント分布の直線性を規定するところにある。

本研究に示すフレキシビリティ法では、ある静定基本形のフレキシビリティマトリクスと座標変換マトリクスから剛性マトリクスを求める。よってこれは剛性法-フレキシビリティ法混合手法とも言えるが、ここではフレキシビリティ法と呼ぶこととする。

剛性法による非線形解析は比較的簡単に行うことができる反面、局所的な破壊を示すようなRC構造物の挙動を解析する際には、要素を細かく分割しなければ安定した収束解を得られないことがある。それに対し、フレキシビリティ法は非線形解析の手法が多少複雑になるものの、荷重が格点のみに作用するような場合には要素分割を少なくすることができるため、自由度を大幅に削減する事ができる。例えば、先端

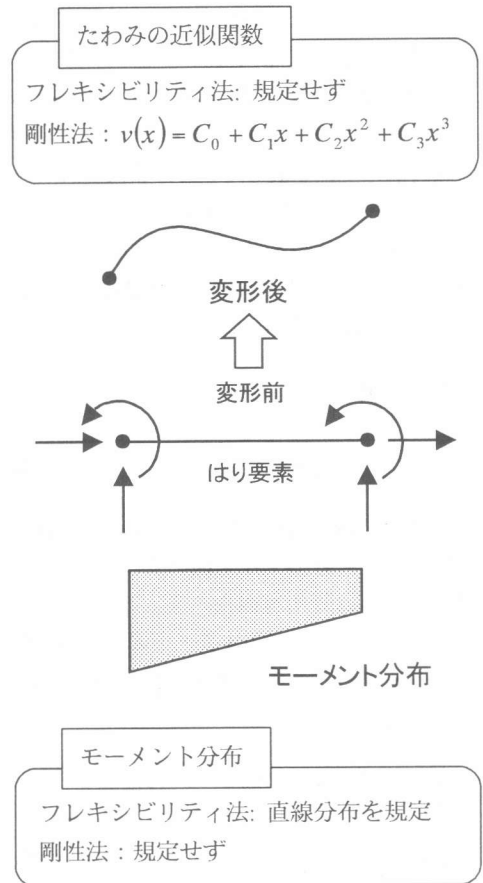


図-1 剛性法とフレキシビリティ法の比較

^{*1} 名古屋大学大学院助手 工学研究科土木工学専攻 工修 (正会員)
^{*2} 名古屋大学大学院 工学研究科土木工学専攻
^{*3} 名古屋大学大学院教授 工学研究科土木工学専攻 工博 (正会員)

に集中荷重の作用する片持ちばりは1要素で解析が可能である。また、変位関数の代わりに応力分布を規定するので、はり・柱に対しては厳密な力の釣り合いを基礎にしていることになり、収斂が容易になり安定した解を得られる可能性がある。

本研究では、まずフレキシビリティ法の定式化を行う。次にRCフレームの解析を行い、本手法の妥当性と、その可能性を示す。

2. フレキシビリティ法によるはりの定式化

2.1 フレキシビリティマトリクスの導出

2次元6自由度の矩形はりについて考える。

図-2に剛体変形を考慮した場合(剛体モード)の節点荷重及び変位ベクトルを示すが、 u , v , θ はそれぞれ、各節点の軸方向、鉛直方向、回転方向の変位を表している。また、 N , V , M は各節点に作用する軸力、せん断力、モーメントを表している。これらをまとめると、剛体モードの節点荷重ベクトル $\{\bar{Q}\}$ 、節点変位ベクトル $\{\bar{q}\}$ は以下のように表される。

$$\{\bar{Q}\} = [N_1, S_1, M_1, N_2, S_2, M_2]^T \quad (1)$$

$$\{\bar{q}\} = [u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2]^T \quad (2)$$

次に、はりを非剛体として考えた場合(非剛体モード)のモデルを図-3に示す。ここで、 x , y は局所座標系、 X , Y は全体座標系を表している。非剛体モードの節点荷重ベクトル $\{Q\}$ 、節点変位ベクトル $\{q\}$ は以下のように表される。

$$\{Q\} = [N_2, M_1, M_2]^T \quad (3)$$

$$\{q\} = [u_2, \theta_1, \theta_2]^T \quad (4)$$

また、 $N(x)$, $S(x)$, $M(x)$ はそれぞれ、はりの任意の断面に作用する軸応力、せん断力、曲げモーメントであり、 $\epsilon(x)$, $\gamma(x)$, $\phi(x)$ は軸ひずみ、せん断ひずみ、曲率を表している。

任意断面の断面力ベクトルを $\{D(x)\}$ 、変位

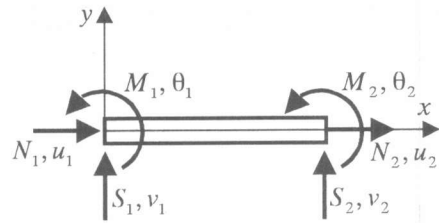


図-2 剛体モードの節点荷重・変位

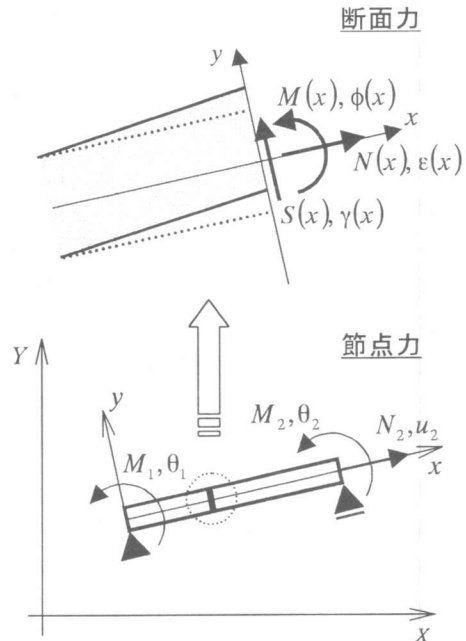


図-3 非剛体モードの節点荷重・変位

ベクトルを $\{d(x)\}$ とすると、次のようになる。

$$\{D(x)\} = [N(x), S(x), M(x)]^T \quad (5)$$

$$\{d(x)\} = [\epsilon(x), \gamma(x), \phi(x)]^T \quad (6)$$

ここで、断面力と変形を節点力および節点変位と関連づける補間関数 $a(x)$, $b(x)$ を導入する。

$$\Delta\{d(x)\} = [a(x)]\Delta\{q\} \quad (7)$$

$$\Delta\{D(x)\} = [b(x)]\Delta\{Q\} \quad (8)$$

次に節点力と任意の断面に作用する断面力とを関連づけるマトリクス $[b(x)]$ を導く。図-4

に示すように、フレキシビリティ法では要素内のモーメントの直線分布を規定しているので、曲げモーメントに関する補間関数マトリクス $[b_m(x)]$ は次のようになる。

$$[b_m(x)] = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{l}\right) & -\frac{x}{l} \end{bmatrix} \quad (9)$$

また任意の断面における荷重—変位関係は、定数 $f(x)$ を用いて次のように表せる。

$$\Delta\{d(x)\} = f(x)\Delta\{D(x)\} \quad (10)$$

ここで $f(x)$ は断面剛性を表している。軸変形及び曲げ変形に関する剛性は、ファイバーモデルより求める。この手法は、はりを微小要素に分割し、各微小要素の剛性の和をはり要素の剛性として計算する方法である²⁾。また、せん断剛性はトラス理論などから求めることができる。

式(10)をガラーキン法を用いて離散化すると、以下のようなになる³⁾。

$$\int_0^l \delta\{D(x)\}^T [\Delta\{d(x)\} - f(x)\Delta\{D(x)\}] dx = 0 \quad (11)$$

また仮想変位の原理より

$$\int_0^l \delta\{d(x)\}^T [\{D(x)\} + \Delta\{D(x)\}] dx = \delta\{q\}^T \{P\} \quad (12)$$

が得られる。ここで $\{P\}$ は新しい内力分布 $\{D(x)\} + \Delta\{D(x)\}$ とつり合い状態にある節点外力である。

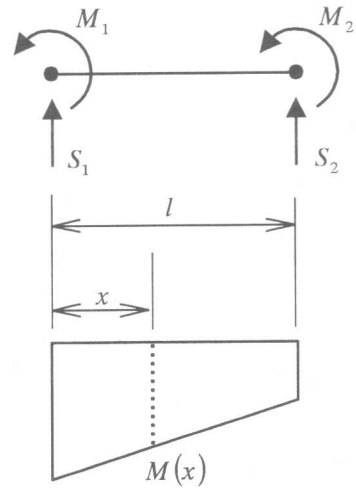
式(11)、(12)を解くと、最終的に次のような式が得られる。

$$[F]^{-1} \Delta\{q\} = \Delta\{P\} \quad (13)$$

ここで $[F]$ はフレキシビリティマトリクスであり、

$$[F] = \int_0^l [b(x)]^T f(x) [b(x)] dx \quad (14)$$

と表される。 $[F]$ マトリクスは、曲げ、せん断、軸方向変形に関するものがそれぞれ独立に得られる。



$$M(x) = M_1 - \frac{M_1 + M_2}{l} x$$

図-4 要素内のモーメント分布

2.2 剛性マトリクスの算出

剛体運動を考慮した場合（剛体モード）の荷重および変位ベクトル $\{Q\}$ 、 $\{q\}$ は、非剛体モードのベクトル $\{Q\}$ 、 $\{q\}$ と、それぞれ次に示すような線形関係を有する。

$$\{Q\} = [t] \{Q\} \quad (15)$$

$$\{q\} = [t]^T \{q\} \quad (16)$$

図-4に示すように、剛体モードの節点鉛直方向変位とたわみ角をそれぞれ v_1 、 v_2 、 θ_1 、 θ_2 、非剛体モードのたわみ角を θ_1^* 、 θ_2^* とすると

$$\theta_1^* = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{l} \quad (17)$$

$$\theta_2^* = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{l} \quad (18)$$

となる。同様に剛体モードの節点鉛直荷重とモーメントをそれぞれ S_1 、 S_2 、 M_1 、 M_2 、非剛体モードでのモーメントを M_1^* 、 M_2^* とすると、これらの関係は以下のようなになる。

$$M_1 = M_1^* \quad (19)$$

$$M_2 = M_2^* \quad (20)$$

$$S_1 = \frac{M_1 + M_2}{l} \quad (21)$$

$$S_2 = -\frac{M_1 + M_2}{l} \quad (22)$$

式(17)～(22)をマトリクス表示することにより、ベクトル変換マトリクス $[t]$ が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \theta_1^* \\ \theta_2^* \end{Bmatrix} = [t]^T \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix} = [t] \begin{Bmatrix} M_1^* \\ M_2^* \end{Bmatrix} \quad (24)$$

$$\therefore [t] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/l & -1/l \\ 0 & 1 & 1/l & -1/l \end{bmatrix}^T \quad (25)$$

非剛体モードの場合の曲げに関する荷重-変形関係は、フレキシビリティマトリクス $[F_m]$ を用いて

$$\begin{Bmatrix} \theta_1^* \\ \theta_2^* \end{Bmatrix} = [F_m] \begin{Bmatrix} M_1^* \\ M_2^* \end{Bmatrix} \quad (26)$$

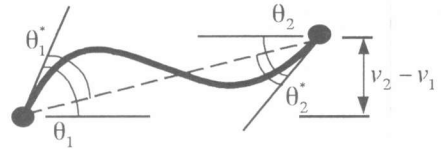
と表されるので、これに式(23)、(24)を代入することにより剛体モードにおける荷重-変位関係は

$$\{\bar{Q}\} = [K]\{\bar{q}\} \quad (27)$$

$$[K_m] = [t]^T [F_m]^{-1} [t] \quad (28)$$

となる。ここで、 $[K_m]$ は曲げに関する要素剛性マトリクスを表している。軸変形に関する要素剛性マトリクスは曲げとは独立して得られる。

剛体運動を考慮した場合（剛体モード）



剛体運動を考慮しない場合（非剛体モード）

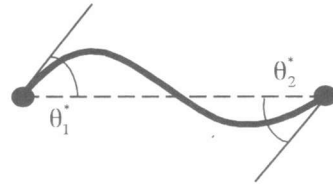


図-5 2つのモードの曲げ変形

以上のような手順で、要素剛性マトリクスがフレキシビリティマトリクスから導かれることが確認された。

せん断力による変形を考慮する場合の要素剛性マトリクスは、曲げとせん断に関する2つのフレキシビリティマトリクスから1つだけ導かれる。せん断力により発生するたわみ角を θ_{s1}^* 、 θ_{s2}^* 、曲げモーメントにより発生するたわみ角を θ_{m1}^* 、 θ_{m2}^* とすると、全たわみ角は次のように表される。

$$\theta_1^* = \theta_{m1}^* + \theta_{s1}^* \quad (29)$$

$$\theta_2^* = \theta_{m2}^* + \theta_{s2}^* \quad (30)$$

式(24)より曲げモーメントとせん断力の関係は明らかなので、これらのたわみ角は式(26)と同様の形で表すことができる。

$$\begin{Bmatrix} \theta_{m1}^* \\ \theta_{m2}^* \end{Bmatrix} = [F_m] \begin{Bmatrix} M_1^* \\ M_2^* \end{Bmatrix} \quad (31)$$

$$\begin{Bmatrix} \theta_{s1}^* \\ \theta_{s2}^* \end{Bmatrix} = [F_s] \begin{Bmatrix} M_1^* \\ M_2^* \end{Bmatrix} \quad (32)$$

ここで $[F_s]$ はせん断変形に関するフレキシビリティマトリクスである。式(31), (32)を基本として, せん断変形を考慮した要素剛性マトリクスは次のような形で得られる⁵⁾。

$$[K] = [t]^T [F_m]^{-1} \left[[I] + [F_s] [F_m]^{-1} \right]^{-1} \times [t] \left[[I] - [\alpha] [\beta] \right]^{-1} \quad (33)$$

ここで $[\alpha]$, $[\beta]$ はフレキシビリティマトリクス $[F_m]$, $[F_s]$ より得られるマトリクスである。

フレキシビリティマトリクスは要素内の荷重分布より得られる断面剛性を元にして作成されるため, 各荷重ステップにおいて更新されなければならない。また, 釣り合い状態を導くための収斂計算が必要となる。

5. フレーム解析

次に, 曲げ破壊を生じる RC フレームの解析を行う⁶⁾。図-6に実験供試体を, 図-7に供試体の解析モデルを示す。供試体には軸方向鉄筋が D16×6本、φ9のスターラップが100[mm]間隔で配筋されている。コンクリートの圧縮強度は28日で26.5[MPa]である。2本の柱の頭部に一定の軸方向圧縮力が与えられた状態で, 水平方向に加力される。図-7の解析モデルであるが, このような解析対象の場合, フレキシビリティ法では3要素4節点で解析が可能である。

ファイバーモデルを用いて断面剛性を求める際のコンクリートの等価1軸圧縮応力-ひずみ関係は図-8に示す Saenz の提案式⁷⁾を用いた。また鉄筋の応力-ひずみ関係は, 図-9に示すようなテンションステフニングを考慮したトリリニア型を採用した。表-1にコンクリートと鉄筋の各解析パラメータを示す。

なお, 今回の解析対象は曲げ破壊を生じていることもあり, 解析ではせん断変形を考慮していない。

図-10は解析結果を示している。左上端の載荷点における荷重-変位の実験値を, 解析値

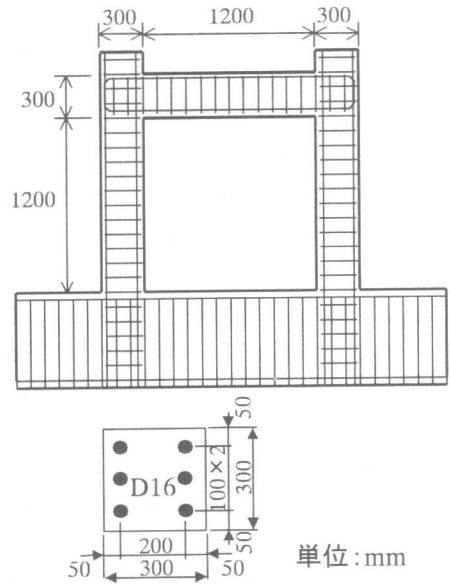


図-6 実験供試体形状

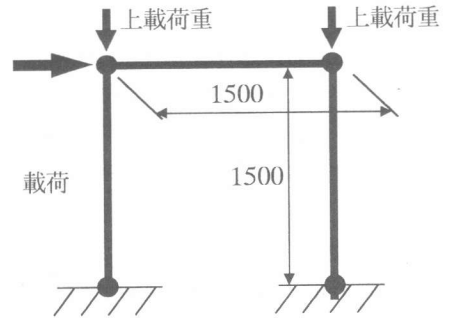
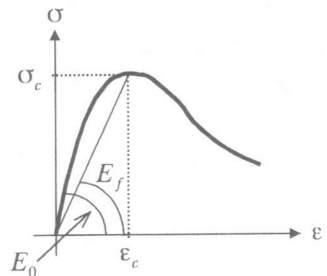


図-7 解析モデル



$$\sigma = \varepsilon E_0 \left[1 + \left(\frac{E_0}{E_f} - 2 \right) \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \right)^2 \right]$$

図-8 コンクリートの構成則

は精度良く捉えている。変形は鉄筋の構成則によるところが大きく、実験の第2点は構成則における第1勾配が、第4点以降については第3勾配の大きさが重要となる事がわかった。

これらの結果から、フレキシビリティ法によるはりの有限要素解析は有効な手段であることが確認できた。しかし今回は比較的簡単な構造物を解析したにとどまったため、フレキシビリティ法と剛性法の収斂性や計算速度の比較などを行うことができなかった。その点は今後の課題とする。

6. 結論

- 1.フレキシビリティ法によるRCフレーム解析の有効性が確認できた。
- 2.今回は単調荷重の解析を行ったが、繰り返しなどの複雑な荷重・変形を受けるRC構造解析にその適用を広げるためには、コンクリートおよび鉄筋の構成則についての検討が必要であると考えられる。
- 3.フレキシビリティ法と剛性法の収斂性や解析速度についての比較検討が必要である。特に塑性ヒンジが発生するような構造物の解析の際の収斂性に注目する必要がある。

参考文献

- 1)E.Spacone, V.Ciampi and F.C.Filippou: Mixed formulation of nonlinear beam finite element, Computers and Structures, pp.71-83, Vol.58, No.1, 1996
- 2)梅原秀哲, 田辺忠顕, 吉田弥智: 鋼材の付着状態を考慮したPCラーメンの履歴挙動に関する研究, 土木学会論文集第396号, V-9, pp.89-98, 1988年8月
- 3)戸川隼人: FORTRANによる有限要素入門, サイエンス社
- 4)田辺忠顕, 檜貝勇, 梅原秀哲, 二羽淳一郎: コンクリート構造, 朝倉書店
- 5)チア・ホン: たわみ性法によるフレーム構造解析, 名古屋大学工学部土木工学科卒業論文, 1999

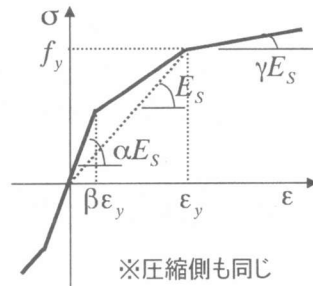


図-9 鉄筋の構成則

表-1 解析パラメータ

コンクリート	
σ_c : 26.5[Mpa]	E_0 : 20.4[Gpa]
ϵ_y : 0.0020	
鉄筋	
f_y : 400[Mpa]	E_s : 214[Gpa]
ϵ_y : 0.0019	α : 3.0
β : 0.1	γ : 0.01

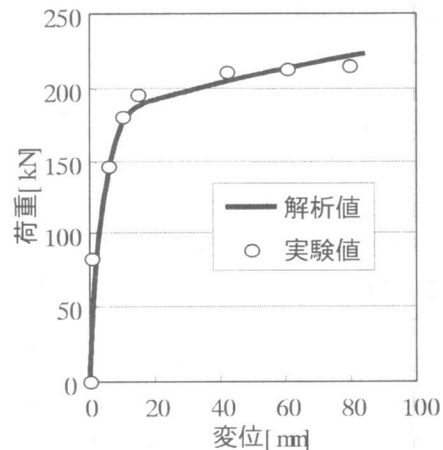


図-10 フレームの荷重-変位関係

- 6)藤掛一典, 大野友則, 西岡隆: 鉄筋コンクリートラーメンのエネルギー吸収容量に関する実験的研究, 土木学会論文集第390号, V-8, pp.113-121, 1988年2月
- 7)色部誠, 河角誠, 安達洋監訳: コンクリート構造物の塑性解析, 丸善