

論文 ファイバーモデルにおける横方向拘束効果の定式化と軸方向コンクリートの構成則に関する研究

中島 望^{*1}・石川 靖晃^{*2}・田辺 忠顕^{*3}

要旨：本研究は、スターラップによる横方向拘束効果をファイバーモデルに取り入れるために、断面の各位置で異なる軸方向応力軸方向ひずみ応答を厳密な3次元解析から求めるものである。まずスターラップを含むコンクリート要素においてスターラップの拘束効果に関する定式化を行う。次にその定式化を3次元の無筋コンクリートの力の釣り合い式に導入して柱の3次元解析を行い、軸方向コンクリートの一軸構成則を求める。数値計算例からスターラップによる拘束効果の影響を考察し、ファイバーモデルに導入する、横方向拘束効果を考慮したコンクリートモデルの検討を行う。

キーワード：横方向拘束効果、一軸コンクリート構成則、有限要素法、ファイバーモデル

1. はじめに

従来 RC フレーム構造物を解析する際には、様々な形で構造物のモデル化がなされてきたが、中でも特にファイバーモデルは、部材の断面剛性の決定に簡便かつ有用で、数多く用いられている。しかし、このファイバーモデルに、スターラップ（横方向拘束鉄筋）による横方向の拘束効果を取り入れるためには、断面の各位置で異なる横方向拘束の効果を明らかにする必要があるが、必ずしも厳密な解析は行われてこなかった。

そこで、本研究ではファイバーモデルに横方向拘束効果を導入するために、スターラップによる横方向拘束効果の定式化を行い、3次元有限要素解析を行うことで、断面の各位置で異なる横方向拘束効果を考慮した一軸コンクリート構成則を求める方法の提案を行った。

2. ファイバーモデルへの横方向拘束効果の導入

まず、通常のファイバーモデルと今回提案

するコンクリート構成則を導入したファイバーモデルの比較を図-1に示す。

通常のファイバーモデルでは、一軸のコンクリート構成則は全ての要素に対し一定であり、この構成則を用いては、実際の横方向拘束効果を十分に評価することはできない。しかし、本研究で提案するコンクリート構成則をそれぞれの要素に取り込むことにより、ファイバーモデルでも横方向拘束効果を十分に評価することが可能となる。

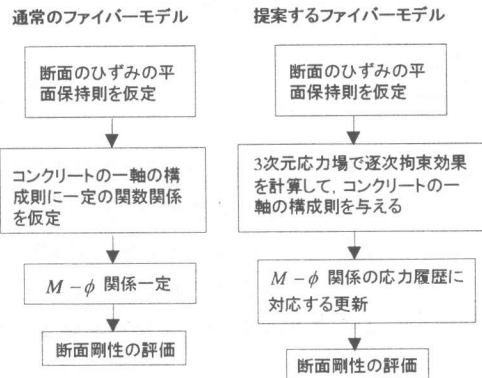


図-1 ファイバーモデルのフローチャート

*1 名古屋大学大学院 工学研究科土木工学専攻（正会員）
 *2 名城大学専任講師 理工学部土木工学科 工博（正会員）
 *3 名古屋大学大学院教授 工学研究科土木工学専攻 工博（正会員）

3. スターラップの拘束効果に関する定式化

3.1 定式化の目的

スターラップの拘束効果に関する定式化の目的は、2章でも述べたように図-2のような部材の剛性評価をファイバーモデルを用いて行う場合に、部材の任意断面を図-3のように取り出し、拘束効果を受ける現在の応力状態を解析することである。

スターラップの数が少ない場合には、スターラップを直接棒要素で置き換えコンクリート要素を細かく分割すれば、通常の FEM による解析が可能である。しかし、多数本が存在する場合にはそれが不可能であるため、コンクリート剛性の中にスターラップの剛性を評価する必要がある。即ち、図-3 のようなモデルにおいて、スターラップの拘束効果を厳密に3次元有限要素法により解析を行う。

3.2 スターラップのひずみ増分

図-4 のように、多数本のスターラップがコンクリート部材内に存在する場合には、トラス要素を用いて節点を多く設けるのは不可能であり、コンクリート要素内に存在する線部材の効果を考える。更に、そのスターラップとコンクリートとの付着は不完全とする。この場合の変形の適合条件から、式(1)が成り立つ¹⁾。

$$\sum_{i=1}^n l_i \Delta \varepsilon_{si} = \int_0^L \Delta \varepsilon_c ds \quad (1)$$

ここで、 $\Delta \varepsilon_{si}$: スターラップの i 番目の要素におけるひずみ増分

$\Delta \varepsilon_c$: スターラップ位置におけるコンクリートのひずみ増分

l_i : スターラップの i 番目の要素における長さ

L : スターラップ 1 本の長さ

$$\left(= \sum_{i=1}^n l_i \right)$$

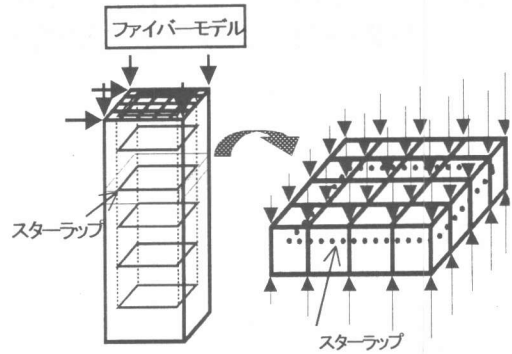


図-2 ファイバーモデル 図-3 考慮するモデル

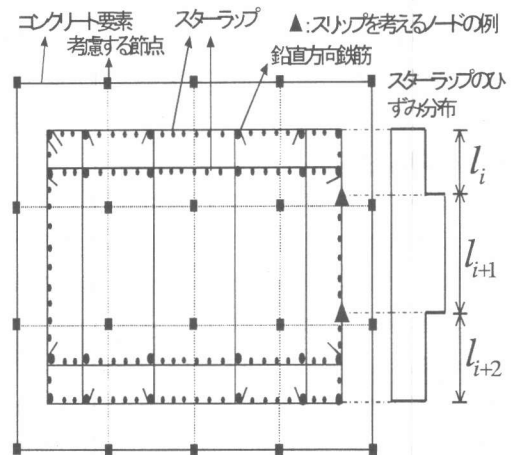


図-4 想定する断面

また、図-4 においてスターラップの角度変化ならびに軸方向鉄筋との摩擦を考慮すると、その摩擦点の前後でスターラップのひずみに差が生ずる。そこでその差を摩擦係数 k_i を用いて表す²⁾。

$$\Delta \varepsilon_{s(i+1)} - \Delta \varepsilon_{si} = \frac{k_i}{l_i + l_{i+1}} \int_0^{l_i + l_{i+1}} \Delta \varepsilon_c ds \quad (2)$$

ここで、 k_i は摩擦係数で本研究独自のものであり一般的なクーロン摩擦ではない。これによりスターラップとコンクリートとのすべりなどを考慮できる。式(1)、(2)より最終的にスターラップに生じるひずみ増分は式(3)、(4)のように表される。

$$\{\Delta\varepsilon_s\} = \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{s1} \\ \Delta\varepsilon_{s2} \\ \vdots \\ \Delta\varepsilon_{s(n-1)} \\ \Delta\varepsilon_{sn} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_{n-1} & l_n \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \int_0^L \Delta\varepsilon_c ds \\ \frac{k_1}{l_1+l_2} \alpha_1 \\ \vdots \\ \frac{k_{n-2}}{l_{n-2}+l_{n-1}} \alpha_{n-2} \\ \frac{k_{n-1}}{l_{n-1}+l_n} \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\alpha_i = \int_0^{l_i+l_{i+1}} \Delta\varepsilon_c ds \quad (4)$$

3.3 剛性マトリックスの誘導

コンクリートのひずみ増分 $\{\Delta\varepsilon_c\}$ は、3次元アイソパラメトリック要素を採用して節点変位増分 $\{\Delta\bar{u}\}$ を用いて表すことができる。

$$\{\Delta\varepsilon_c\} = [B]\{\Delta\bar{u}\} \quad (5)$$

ここで、 $[B]$ は形状関数を全体座標で適当に微分したマトリックスである。式(5)を用いて各々のスターラップ位置におけるコンクリートのひずみ増分を式(3)に代入して計算すると、スターラップのひずみ増分もコンクリート要素の節点変位増分で表すことができる。

$$\{\Delta\varepsilon_s\} = [C]\{\Delta\bar{u}\} \quad (6)$$

ここで、 $[C]$ はスターラップの配置によって決定されるマトリックスである。

また、スターラップの増分ひずみエネルギー $-\Delta U_s$ は式(7)で与えられる。

$$\Delta U_s = \int_L E_s A_s \{\Delta\varepsilon_s\}^T \{\Delta\varepsilon_s\} ds \quad (7)$$

ここで、 E_s : スターラップのヤング率
 A_s : スターラップの断面積

式(7)に式(6)を代入すると、式(8)のようになる。

$$\Delta U_s = \int_L E_s A_s \{\Delta\bar{u}\}^T [C]^T [C] \{\Delta\bar{u}\} ds \quad (8)$$

ここで、増分区間内での最小ポテンシャルエネルギーの原理を用いると、スターラップの要素剛性マトリックス $[K_s]$ が、

$$[K_s] = \int_L E_s A_s [C]^T [C] ds \quad (9)$$

と導ける。

3.4 スターラップの局部における拘束効果

図-5において、角度 θ のときにスターラップに働く力を $F(\theta)$ として、 $F(\theta)$ を次式のように仮定する。

$$F(\theta) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi} \left\{ F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) \right\} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \quad (10)$$

ここで、 $F(0), F(\frac{\pi}{2})$ は、図-5においてはスターラップを引張る方向に図示されているが、実際の計算においては、座標系に応じて符号を変える必要がある。

今、図-5のようにスターラップの局部に対して単位面積当たり σ_b の力で、自由体が釣り合い状態であるとすると、

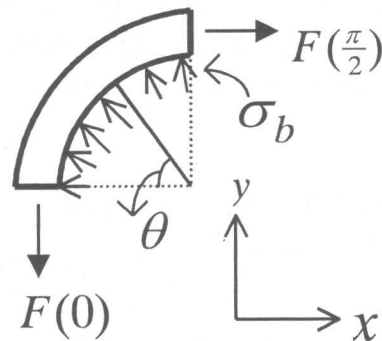


図-5 局所的な圧縮応力

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_b br \sin \theta d\theta = F(\theta) \quad (11)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_b br \cos \theta d\theta = F(\theta) \quad (12)$$

である。ここに、

b : スターラップの直径

r : スターラップ局部の曲率半径

式 (11), (12) より、

$$\sigma_b = \frac{F(\theta)}{br} \quad (13)$$

となり、 σ_b の x 成分、 y 成分を σ_x, σ_y とすると、

$$\sigma_x = \sigma_b \cos \theta \quad (14)$$

$$\sigma_y = \sigma_b \sin \theta \quad (15)$$

であるから、式 (14), (15) に式 (13) を代入すると、次式のようになる。

$$\sigma_x = \frac{F(\theta)}{br} \cos \theta \quad (16)$$

$$\sigma_y = \frac{F(\theta)}{br} \sin \theta \quad (17)$$

このとき、微小角度 $d\theta$ 間に作用する力の x 方向および y 方向成分は、

$$F_x = \sigma_x br d\theta \quad (18)$$

$$F_y = \sigma_y br d\theta \quad (19)$$

と表される。

ここで、 σ_b が作用している面上における仮想変位を $\delta\{u_a\}$ とすると、実際の等価節点力 $\{F_1\}$ は仮想仕事の原理より、次式のようになる。

$$\delta\{u\}^T \{F_1\} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (F_x \delta u_{a,x} + F_y \delta u_{a,y}) d\theta \quad (20)$$

ここで、 σ_b が作用している面上における仮想変位は、3次元アイソパラメトリック要素の、スターラップの局部における局所座標 (ξ_0, η_0, ζ_0) に等しいと仮定すると、式 (20) は、

$$\begin{aligned} \delta\{u\}^T \{F_1\} &= \delta\{u_a\}^T \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} d\theta \\ &= \delta\{u_a\}^T \begin{bmatrix} 1 - \frac{2}{\pi} & \frac{2}{\pi} \\ \frac{2}{\pi} & 1 - \frac{2}{\pi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F(\frac{\pi}{2}) \\ F(0) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

となる。ここで、 $\delta\{u_a\}$ は形状関数マトリックス $[N]$ を用いることにより次式のようになる。

$$\delta\{u_a\} = [N(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)] \delta\{\bar{u}\} \quad (22)$$

式 (22) を式 (21) に代入すると、

$$\begin{aligned} \delta\{\bar{u}\}^T \{F_1\} &= \delta\{\bar{u}\}^T [N(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)]^T \\ &\quad \begin{bmatrix} 1 - \frac{2}{\pi} & \frac{2}{\pi} \\ \frac{2}{\pi} & 1 - \frac{2}{\pi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F(\frac{\pi}{2}) \\ F(0) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

となる。ここで、スターラップの応力を σ_s とすると、

$$F(\theta) = A_s \sigma_{s(\theta)} \quad (24)$$

$$\sigma_{s(\theta)} = E_s \varepsilon_{s(\theta)} \quad (25)$$

であり、 $\delta\{\bar{u}\}^T$ は任意であるから、結局式 (23) は、

$$\begin{aligned} \{F_1\} &= [N(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)]^T \\ &\quad \begin{bmatrix} 1 - \frac{2}{\pi} & \frac{2}{\pi} \\ \frac{2}{\pi} & 1 - \frac{2}{\pi} \end{bmatrix} E_s A_s \begin{Bmatrix} \varepsilon_s(\frac{\pi}{2}) \\ \varepsilon_s(0) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

となり、式 (6) を用いると、

$$\begin{aligned} \{F_1\} &= [N(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)]^T \\ &\quad \begin{bmatrix} 1 - \frac{2}{\pi} & \frac{2}{\pi} \\ \frac{2}{\pi} & 1 - \frac{2}{\pi} \end{bmatrix} E_s A_s \begin{Bmatrix} C(\frac{\pi}{2}) \\ C(0) \end{Bmatrix} \{\bar{u}\} \end{aligned}$$

$$= [\beta] \{u\} \quad (27)$$

となる。ここに、 $C(0), C(\frac{\pi}{2})$ は $[C]$ において、対象とするスターラップに適応する行ベクトルである。ここで、 $[\beta]$ は非対称となっており、非対称だと安定した解が得られない可能性があるが、本研究では今のところこの点については検討していない。

式 (27) および式 (9) を足し合わせ、コンクリートの要素剛性マトリックス $[K_c]$ を用いることによって、スターラップを含むコンクリート要素においてスターラップの拘束効果を表現する支配方程式を得ることができる。

$$\{F\} = [K_c + K_s + \beta] \{u\} \quad (28)$$

4. コンクリート柱の単調軸載荷に対する数値解析

4.1 解析モデル

解析は先に述べた定式化を、3次元の無筋コンクリートの力の釣り合い式に導入することにより行った。また解析モデルを図-6 および図-7 に、各物性値を表-1 に示す。無筋コンクリートの構成則としては Drucker-Prager を用いており、図 8~10 中の点線で描かれているように硬化パラメータを決定している³⁾。解析は軸方向変位制御で行い、解析ケースとしてスターラップは D10, D16, および D22 の3パターン用いた。また、今回の解析では、式 (2) における k_i を $k_i=0$ として、コンクリートとスターラップの間に付着を考慮しないものとした。

4.2 解析結果及び考察

各ケースにおいて、図-6 における上の段のスターラップの外側と内側 (図-7 中の点 A~C) の軸応力と軸ひずみの関係を、図-8~10 に示す。

いずれの結果も、スターラップの内側の方が外側よりも軸応力が大きく、スターラップの拘束効果がよく表現されていると言えるが、

表-1 解析に用いた物性値

コンクリート			
ヤング率 E_c (Gpa)		一軸圧縮強度 f_c' (Mpa)	降伏ひずみ
19.6		35.9	0.002
スターラップ			
公称	鉄筋比 (%)	ヤング率 E_s (Gpa)	降伏点 (Mpa)
D10	0.178	205.8	294.0
D16	0.497		
D22	0.968		

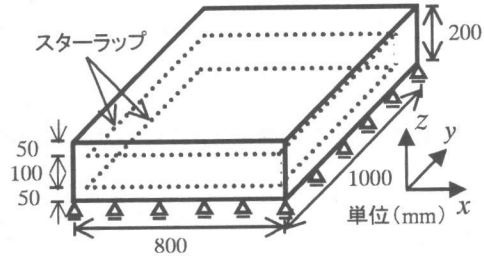


図-6 解析モデル

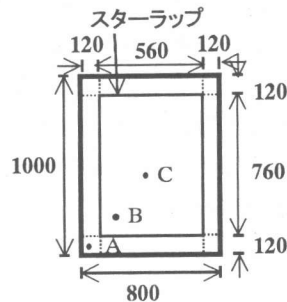


図-7 断面図 (単位 mm)

スターラップの内側においては、スターラップの局部に近い点 B の方が、供試体の中心近くの点 C よりも、軸応力が大きい。これは、3.4 節の定式化による影響が、局部近くの方が大きいためと考えられる。

また、スターラップの断面積が大きくなるほど、スターラップの内側の点 B 及び点 C では拘束効果は大きくなるが、反対にスターラップの外側の点 A においては、スターラップの断面積が大きくなるほど、ピーク以降の軸応力の減少率が大きくなり、スターラップの外側と内側の軸方向応力の差が広がることになる。これは、スターラップの内側では水平方向に圧縮応力が生じており、これに反してスターラップの外側のかぶり部分では、水

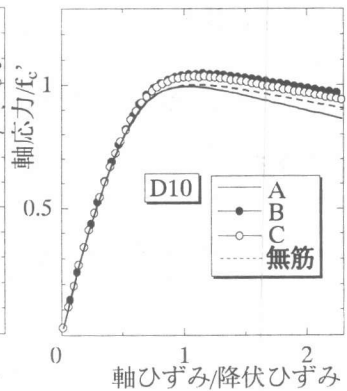
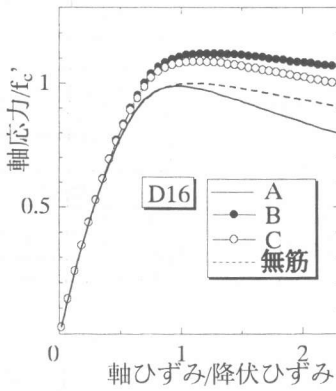
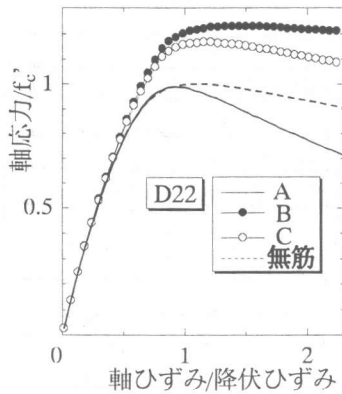


図-8 応力-ひずみ関係 (D22)

図-9 応力-ひずみ関係 (D16)

図-10 応力-ひずみ関係 (D10)

平方向に引張応力が生じているためであると
考えられる。

軸圧縮だけから一般的な結論を導けないが、
今回の結果を、道路橋示方書に定められた式⁴⁾
より得られた値と比較すると、表-2 のよう
になる。本研究が正しいとすると、道路橋示
方書の式はやや安全側をとっていることにな
る。いずれにしろ、より多数の場合について
数値実験を行う必要がある。

5. 結論

以下に、本研究で得られた結論、及び今後
の展望を挙げる。

- 1) 本研究で行った定式化により、一軸のコン
クリート構成則に、スターラップによる拘
束効果を反映する手法を提案することがで
きた。
- 2) スターラップの拘束効果は断面中央よりも、
スターラップの局部近くの方が大きくなっ
た。
- 3) 解析例は単調軸載荷のみであり、様々な
応力状態に対する検討が必要である。
- 4) スターラップの拘束効果を考慮した一軸の
コンクリート構成則をファイバーモデルに
取り込み、実構造物レベルの解析に発展さ
せる。

表-2 拘束されたコンクリートの強度比較

鉄筋比 (%)	横拘束筋で拘束されたコンクリートの強度	
	示方書の式(Mpa)	今回の結果(Mpa)
0.968	38.0	39.2~46.6
0.497	37.0	37.2~42.1
0.178	36.3	36.3~37.7

参考文献

- 1) 梅原秀哲, 田辺忠顕, 吉田弥智: 鋼材の付
着状態を考慮した PC ラーメンの履歴挙動
に関する研究, 土木学会論文集, 第 396 号,
V-9, pp89-98, 1988 年 8 月
- 2) Diep,B,K. Tanabe,T. : Analysis of Two
Continuous Span Prestressed Concrete Beam
with External Cables Considering Shear
Deformation, JCI 年次論文報告集, Vol.21,
第 3 号, pp955-960, 1999 年
- 3) Tanabe,T. Ishikawa,Y. and Ando,N. : Visco-
Elastic and Visco-Plastic Modeling of Transient
Concrete, Proc.of the EURO-C 1998
Conference on Computational of Concrete
Structures.Badgastein.Austria, pp441-453,Mar.
1998
- 4) 日本道路協会: 道路橋示方書 (V 耐震設計
編)・同解説, 丸善, pp130-131, 1996 年