

論文 長大スパンコンクリートアーチ橋の振動挙動と分岐モードとの関連性に関する研究

姫野 正太郎*1・田邊 忠顕*2

要旨: せん断変形を含む Timoshenko はり理論, 非線形領域での 2 軸曲げおよび大変形理論を考慮に入れた 3 次元 12 自由度はり要素による増分形の接線剛性マトリクスを用いて地震応答解析を現在のところ存在しない未知のスパン長である 600m スパン RC アーチ橋に対して試みた. Newmark の β 法を用いた解析を通して, 600m モデル橋の振動挙動と分岐点 (bifurcation point), 分岐モード (bifurcation mode) の関連性を知ることによって, 実設計の可能性を探った. これらの事から結論として, その実現可能性として明るい見通しを得た.

キーワード: bifurcation mode, 600m スパン, Newmark の β 法, 2 軸曲げ

1. はじめに

コンクリート構造として本質的に優れていると考えられるアーチ橋を対象とし, 実存する最長スパンを大きく超える 600m スパン RC アーチ橋を建設するとすれば, 実際上どのような動的特性, 構造上の問題が生じるか検討を行うことにした. 本研究では, せん断変形を含む Timoshenko はり理論および大変形理論を考慮に入れた 3 次元 12 自由度はり要素による増分形の接線剛性マトリクスを用い, 地震応答解析を現在のところ存在しない未知のスパン長である 600m スパン RC アーチ橋に対して試みた. 600m モデル橋の振動挙動と同時に進んだ固有値解析から得られる分岐点 (bifurcation point), 分岐モード (bifurcation mode) の両面からアーチ橋の実設計の可能性を検証した.

2. Newmark の β 法による地震応答解析

2. 1 運動方程式及び各マトリクスの作成

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C(t)]\{\dot{y}\} + [K(t)]\{y\} = -[M]\{\ddot{y}_0\} \quad (1)$$

構造物が地震動を受ける場合, 減衰作用を考慮した多自由度の運動方程式は式(1)のように

表される. ここで, $[M]$, $[C(t)]$, $[K(t)]$ は, それぞれ構造物の質量, 減衰, 剛性マトリクスである. また, $\{\ddot{y}\}$, $\{\dot{y}\}$, $\{y\}$ は, それぞれ全要素節点の自由度による加速度ベクトル, 速度ベクトル, 変位ベクトルであり, $\{\ddot{y}_0\}$ は地震動による慣性加速度ベクトルである.

本研究では, 質量マトリクスに質量整合マトリクス (consistent mass matrix) を用いた.

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} &= \{0\} \\ \{y\} &= \{u\}e^{i\omega t} \\ |-\omega^2[M] + [K]| &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

また減衰マトリクスは, 減衰定数 $h_1 = h_2 = 0.03$ として, 非減衰自由運動方程式である式(2)を解くことによって得られる 1 次と 2 次の ω を式(3)に代入し求めた.

$$[C(t)] = a_0[M] + a_1[K(t)] \quad (3)$$

$$\begin{cases} a_0 = 2\omega_1\omega_2 \frac{h_1\omega_2 - h_2\omega_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \\ a_1 = 2 \frac{h_2\omega_2 - h_1\omega_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \end{cases}$$

*1 名古屋大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (正会員)

*2 名古屋大学大学院教授 工学研究科土木工学専攻 工博 (正会員)

式(3)のように質量マトリクスと剛性マトリクスの和で表される Rayleigh 型の減衰マトリクスを用いた。そして剛性マトリクスは、せん断変形を含むはりの曲げ剛性マトリクスを導く Timoshenko はり理論およびポストピーク挙動の解析に有効である大変形理論を考慮に入れた 3次元 12自由度はり要素による増分形で表したの接線剛性マトリクスを用いた。

2. 2 Newmark の β 法による収束計算

加速度, 速度, 変位の関係は増分形式で式(4)を満たすように取り扱っている。

$$\begin{aligned} \{\Delta y\} &= \{\dot{y}_n\} \Delta t + \frac{1}{2} \{\ddot{y}_n\} \Delta t^2 \\ &\quad + \beta \{\Delta \ddot{y}\} \Delta t^2 \\ \{\Delta \dot{y}\} &= \{\dot{y}_n\} \Delta t + \gamma \{\Delta \ddot{y}\} \Delta t \\ \{\Delta \ddot{y}\} &= -[M]^{-1} [C] \{\Delta \dot{y}\} \\ &\quad - [M]^{-1} [K] \{\Delta y\} - \{\Delta \ddot{y}_0\} \end{aligned} \quad (4)$$

ここで, β は加速度変化の仮定に応じた値を取るが, 時間刻みの大きさにかかわらず無条件に安定である利点を持つ平均加速度法 $\beta = 1/4$ を本研究では採用した。また, γ もパラメータであり, β と連動するが $1/2$ をとる場合が多い。

Iteration step $[i=0]$ とし, 式(5)のようにそのときの加速度, 速度, 変位増分を仮定する。

$$\begin{aligned} \{\Delta y\}^{[i]} &= \{\dot{y}_n\} \Delta t + \frac{1}{2} \{\ddot{y}_n\} \Delta t^2 \\ \{\Delta \dot{y}\}^{[i]} &= \{\dot{y}_n\} \Delta t \\ \{\Delta \ddot{y}\}^{[i]} &= [\{\Delta y\}^{[i]} - \{\Delta y\}^{[0]}] / (\Delta t^2 \beta) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

式(4), (5)から $[i+1]$ での微小時間 Δt の増分変位が式(6)が得られる。

$$\begin{aligned} \{\Delta y\}^{[i+1]} &= [\bar{K}]^{-1} \{\Delta \bar{P}\} \\ [\bar{K}] &= [K] + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} [C] + \frac{1}{\beta \Delta t^2} [M] \\ \{\Delta \bar{P}\} &= -[M] \{\Delta \ddot{y}_0\} \\ &\quad - [M] \{\Delta \ddot{y}_{n+1}\}^{[i+1]} \\ &\quad - [C] \{\Delta \dot{y}_{n+1}\}^{[i+1]} \\ &\quad - \int [B]^T \{\sigma(\Delta y_{n+1})\}^{[i+1]} dV \end{aligned} \quad (6)$$

ここで $\{\Delta \bar{P}\}$ の第4項は内力から求められる節点力である。式(6)を用いることで, 式(5)から

Δt の速度, 加速度増分は式(7)のようになる。

$$\begin{aligned} \{\Delta \dot{y}\}^{[i+1]} &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \{\Delta y\} - \frac{\gamma}{\beta} \{\dot{y}_n\} \\ &\quad - \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \{\ddot{y}_n\} \Delta t \\ \{\Delta \ddot{y}\}^{[i+1]} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} \{\Delta y\} - \frac{1}{\beta \Delta t} \{\dot{y}_n\} \\ &\quad - \frac{1}{2\beta} \{\ddot{y}_n\} \end{aligned} \quad (7)$$

ここで $\{\Delta \bar{P}\}$ の大きさによって収束判定を行い, 収束していないとしたら, 式(6), (7)を繰り返し用い, 収束計算をおこなうことによって, 非線形性を考慮できる。収束したと判定したら, 新たな地上加速度によって, 式(5)~(7)を用い順次, 地震応答を求めることができる。

3. 2軸曲げ強度の解析

任意断面を有する RC はりに任意方向の曲げモーメントが作用する場合, 断面の主軸方向を求めてモーメントをその主軸方向に分解する必要がある。しかし一般にひび割れ領域を決定するのが難しく, また非線形領域の解析では与えられた中立軸勾配に対して一義的に中立軸位置を定めることはできない。勾配が一定であってもひずみの大きさによって, モーメント比が異なってくる。そこで, 数値解析により収束計算を行って断面の中立軸を求めなければならない。その手法として, ここでは図-1のような小さな要素分割したファイバーモデル断面を考える。

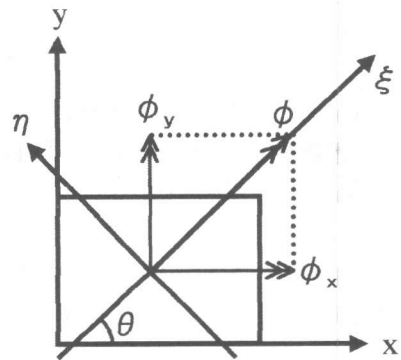


図-1 2軸曲げを受けているファイバーモデル

図-1のように断面を微小要素に分割したファイバーモデル断面を考え、主軸(ξ, η)と(x, y)軸とのなす角を θ とする。変形状態から求められるの軸力による軸ひずみ ε_0 および2軸方向の曲率 ϕ_x, ϕ_y を用いて、主軸方向とその方向の曲率 ϕ を求めると式(8)となる。

$$\phi = \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}, \quad \theta \cong \tan \theta = \frac{\phi_y}{\phi_x} \quad (8)$$

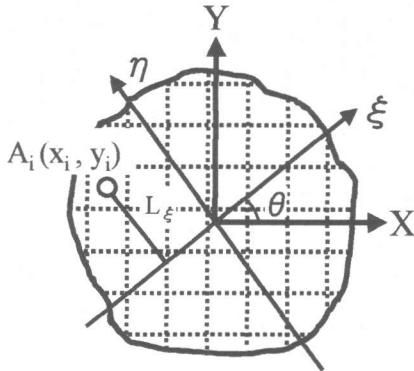


図-2 2軸曲げを受けている全断面

図-2において原点を通る求めた主軸方向と任意の微小断面 $A_i(x_i, y_i)$ との距離 L_n と式(8)を用いて、曲げによる軸ひずみは式(9)となる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_M &= L_n \phi \\ &= (-x_i \sin \theta + y_i \cos \theta) \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2} \quad (9) \end{aligned}$$

はり要素の total の軸ひずみ ε_x は、軸力によるひずみ ε_0 と曲げによるひずみ ε_M の和であるので、従って式(10)のようになる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_0 - \varepsilon_M \\ &= \varepsilon_0 - (-x_i \sin \theta + y_i \cos \theta) \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2} \quad (10) \\ &= \varepsilon_0 + x_i \phi_y - y_i \phi_x \end{aligned}$$

式(10)で求めた total 軸ひずみ ε_x がゼロになると要素の全断面における中立軸の式となっており、式(11)が得られる。

$$y_i = \frac{\phi_y}{\phi_x} x_i + \frac{\varepsilon_0}{\phi_x} \quad (11)$$

微小断面についての total 軸ひずみ ε_0 から、仮定した応力-ひずみ関係を用いることによって

応力分布が求まり、微小断面の和を取ることによって全断面の応力などが得られる。

解析において、収束計算に行い収束した際に得られる中立軸および応力分布が正確な2軸曲げが考慮された断面となっており、断面中心での軸力および2軸方向の曲げモーメントは式(12)で求められる。

$$\begin{aligned} N &= \sum_i A_i \sigma_i \\ M_x &= \sum_i A_i \sigma_i y_i \\ M_y &= \sum_i A_i \sigma_i x_i \end{aligned} \quad (12)$$

以上の流れによって、どのような方向から荷重、変位が与えられても、軸力変化を考慮した中で正確な中立軸が得られ、各方向に生じる曲げモーメントも正確に算出することができる。

4. コンクリート、鉄筋の構成則

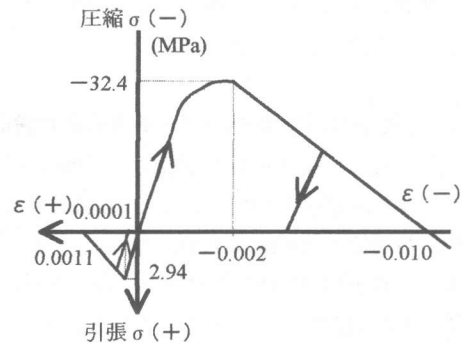


図-3 コンクリートの応力-ひずみ関係

本解析で用いたコンクリートの構成則は、Saenz の提案したモデルを参考にし、図-3のように仮定した。圧縮領域では降伏点まで応力はひずみの2次式で表され、ひずみが-0.002で圧縮降伏し、-0.010で応力零の状態に至る。除荷経路は、圧縮、引張りとも初期勾配を用いて ε 軸まで到達し、その後は軸上を原点までたどる経路となっており、材料によるエネルギー損失が考慮されている。再載荷経路は、圧縮、引張りとも最大応力、ひずみの点に向かう直線を経路としている。

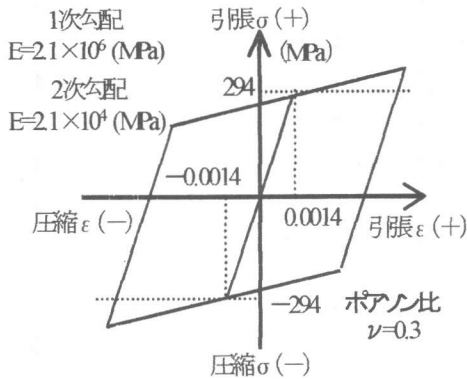


図-4 鉄筋の応力-ひずみ関係

本解析では図-4に示すように引張側、圧縮側ともに、降伏点を超えると初期勾配の1/100の2次勾配で応力が上昇するバイリニア型の鉄筋の応力-ひずみ関係を用いた。除荷の場合には、降伏以前と同じ傾きで変形が進み、荷重単調増加時の降伏曲線の延長線上に交わるまで応力は減少し、それ以降、降伏曲線上を移動する。圧縮、引張強度は、294(MPa)とした。

5. 600mスパンモデルアーチ橋の概略設計

現在の世界最長スパンのRCアーチ橋は中国にある450m級のもので、日本での最長スパンは別府明礬橋の235mである。さらに、現在我が国では富士川橋(静岡県, 265m), 高松大橋(宮崎県, 260m)が施工中である。世界最長スパンから更に約150m長く、また日本の最長スパンよりも約365m長い600mのアーチ橋を考える。

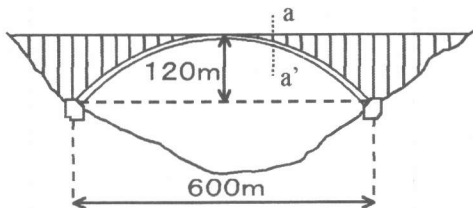


図-5 600mアーチ橋概観図

図-5に示すようなモデルアーチ橋は、(株)ピー・エスで従来のアーチ橋の設計経験に基づいて概略計算されたものであり、詳細な設計は

なされていない。アーチの軸線形状は、cosine hyperbolic 曲線関数で得られる。

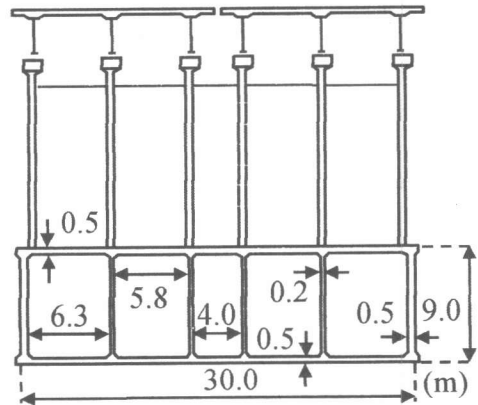
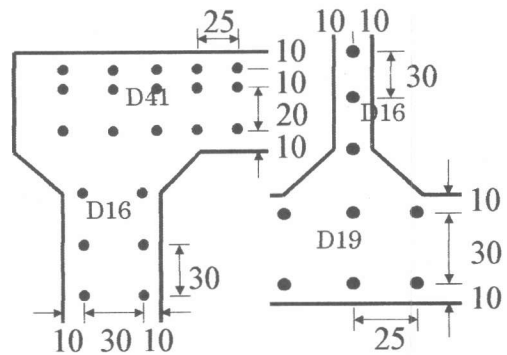


図-6 モデルアーチ橋の断面図 (a-a')

図-5の a-a'部分のアーチ断面形状を図-6に示す。5室BOX断面になっており、アーチスプリングからクラウンにかけて、断面の厚みが12mから6mに一定の割合で変動している。



<上板及び側板> <下板及び側壁>

図-7 鉄筋の配置

また、断面内の鉄筋の配置状態を図-7に示す。アーチリブの断面に主鉄筋として、上板にD41を鉛直方向に3本、それを水平方向に25cm間隔で並べ合計357本、下板にD19を鉛直方向に2本それを水平方向に25cm間隔で並べ238本、側板にD16を30cm毎に2本ずつ、隔壁にD16を30cm毎に1本ずつ配置されている。

6. モデル橋の PUSH OVER 解析

解析方法としてはアーチリブのみの構造と簡略化して考え、横桁、柱、上路などはまとめて死荷重と考え、アーチリブと柱が接している部分に加わっている状態のモデル橋を対象とした。次に拘束条件はアーチスプリングの全自由度固定、つまり両端固定状態であるとした。このようなモデル橋に対して、アーチ頂部を変位制御して、橋軸直角方向から荷重を単調載荷して PUSH OVER 解析を試みたところ、**図-8**のような荷重-変位曲線が得られた。

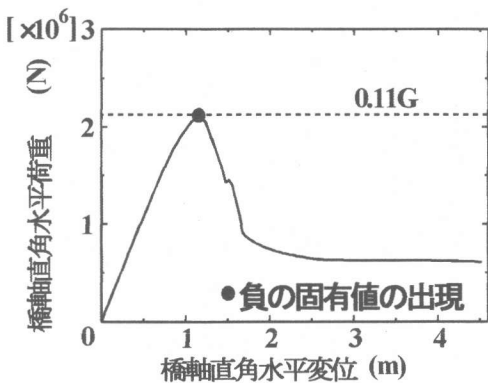


図-8. 橋軸直角方向の PUSH OVER 解析

橋軸直角方向の PUSH OVER 解析において、設計震度を求めてみたところ、0.1~0.2の範囲で求まり、道路橋示方書的设计基準を満たすためには最大 0.2G の慣性力に耐えうることが必要である。だが、自重載荷状態のモデル橋は、**図-8**の荷重-変位曲線が示すように、0.11G までの水平耐荷力しかなく、現在の示方書的设计基準に満たしていないことがわかった。

構造物の安定性の条件は、内力による仕事か外力による仕事より大きいことである。任意時間におけるひずみ速度ベクトルに対して、力の釣合いや慣性項はゼロになることを考慮すると、次式の静的構造物安定条件が求まる。

$$\det\{[K]+[K_g]\}=0 \quad (13)$$

方程式上では固有値が零になること、本解析上では式(13)から得られる固有値 λ が正から負に

変わることによって臨界点の判断をしている。また、臨界点での性質として、式(14)のうち必ずどちらかひとつが成り立つのが特徴である。

$$\dot{u}=0 \quad \{v_i\}^T \{f\}=0 \quad (14)$$

$\{v_i\}$: 固有ベクトル $\{f\}$: 荷重ベクトル
式(14)の前者が成り立つときの臨界点は、limit point と呼ばれ、構造物に荷重を作用させたときの荷重変位曲線の最大荷重点がそれに当たる。式(14)の後者が成り立つときは、bifurcation point であり、固有ベクトルと荷重ベクトルが直交している。この性質は固有モードで確認することができる。**図-8**でモデル橋の負の固有値の出現状況を見ると、耐荷力の地点で負の固有値を1個得ることができた。これは limit point に当たる負の固有値であると思われる。

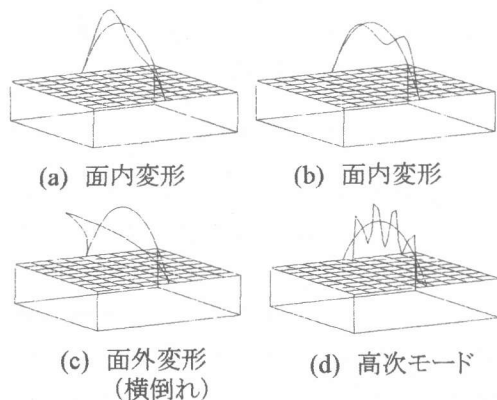


図-9 主な固有モード

また、それぞれの固有値に対応する固有モードを見てみると、主に解析中に**図-9**のようなモードが得られた。耐荷力に達するまでは実変形と同等のモード(c)を1次モードとして得ており、構造物の状態としては安定している。耐荷力に達した後、負の固有値に対応するモードとして、また実変形と同等のモード(c)が対応した。これは固有モードの面からも負の固有値が接線勾配がゼロになる点を通過することによって生じる limit point の固有値であることが確認できる。

7. モデル橋の地震応答解析

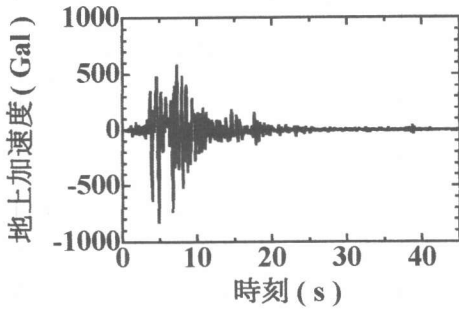


図-10 800Gal の地震動

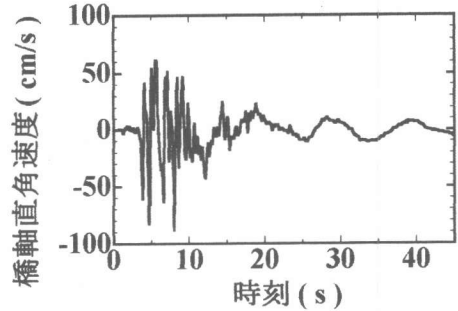


図-12 速度応答

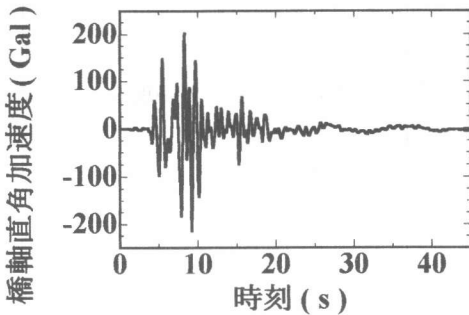


図-11 加速度応答

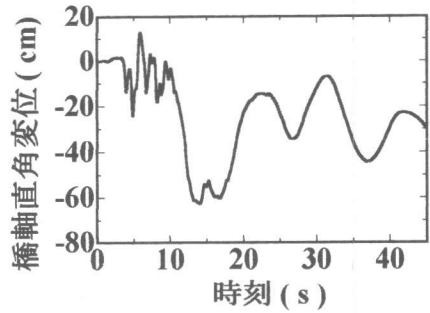


図-13 変位応答

Newmark の β 法を用いて、PUSH OVER 解析と同様のモデル橋に対して、図-10 のような最高約 800Gal 程度の地上加速度を橋軸直角方向から固定端部分に与えて、図-11 から図-13 の地震応答を得た。PUSH OVER 解析では降伏変位が 116cm であるのに対して、最大応答変位は 61cm であり、800Gal の地震動に対してはモデル橋の耐荷力に達する時点より前の段階で振動していることがわかる。また加速度応答をみると、地震動が 800Gal であるのに対して約 1/4 の 220Gal 程度でほとんど振動していないのが特徴的である。このような点から 600m スパン RC アーチ橋でも、800Gal 程度の地震動には、ある程度耐えることがわかった。次に図-14 の解析中の接線剛性マトリクスの 1 次固有値の変化を時刻歴で示すと終始、負の固有値を得ることはなく、固有値解析の面からも 800Gal 程度の地震動に対して、耐荷力に達しず十分な耐震性能を有していることがわかる。

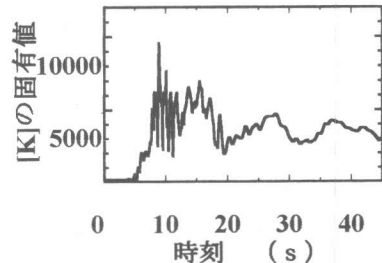


図-14 1 次固有値の変化

8. 結論

600m アーチ橋は示方書の基準を満たしていないが、800Gal 程度には十分な耐荷力を有していることがわかった。

<<参考文献>>

- 1) 柴田明徳：最新耐震構造解析，森北出版株式会社，1981
- 2) D.R.J. OWEN, E. HINTON: Finite Element in Plasticity, Theory and Practice, 1980
- 3) 社団法人日本道路協会：道路橋示方書・同概説 V 耐震設計編，1997