

# 論文 Flexibility 法による RC 柱の繰り返し解析

中野 友裕\*1・田邊 忠顕\*2

**要旨:** Flexibility 法による構造解析の特徴は、要素内のモーメント分布の直線性を規定することである。厳密な力の釣合いを基礎とする本手法においては、変位の近似関数を仮定する剛性法と比べ、大幅に少ない自由度で精度よい解析を行うことができる。本研究は、post-peak 領域に挙動が進展する RC 柱を Flexibility 法により解析し、RC 構造物の post-peak 挙動解析に対する Flexibility 法の適用可能性を示したものである。

**キーワード:** Flexibility 法, Post-Peak 挙動解析, Fiber-Model

## 1. はじめに

兵庫県南部地震における土木構造物の多大な被害を経験して、各種構造物の耐震基準の改定がなされてきた。その改定のひとつに、構造物の供用期間中に発生する確率は低いが大きな強度を有する地震動を考慮した設計照査を行うことがあげられている。この「レベル2地震動」の設定にあたっては、該当地域の地震環境や地盤特性などの考慮が重要なわけであるが、一方で、このような低頻度大地震の推定には極めて大きな不確定要素が存在することも事実である<sup>1)</sup>。そのため、コンクリート構造物（以下 RC 構造物）の設計照査にあたって、post-peak 挙動の推定・把握は避けて通れない問題となる。

このような重要性にも関わらず、未知量としての要素変位と内挿関数の近似に基づく剛性法による post-peak 挙動の解析には非常に多くの問題が存在する。本研究は、厳密な力の釣り合いを基にした Flexibility 法により繰り返し荷重を受ける RC 柱の解析を行い、これらの問題に対する合理的かつ厳密な適用可能性を評価するものである。

## 2. Flexibility 法によるはり要素の定式化

### 2.1 Flexibility マトリクスの誘導<sup>2)</sup>

図-1 に示すような3次元12自由度のはり要素を考え、 $x$  軸方向の部材軸方向力および  $y, z$  方向のせん断力を  $X, Y, Z$ 、また各軸まわりの曲げ(ねじり)モーメントを  $M$  で表す。また、各々に対応する変位として  $u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z$  を定める。添数字は節点番号を示している。

これらの表記を用いると、剛体モードの節点力ベクトル  $\{\bar{Q}\}$  および節点変位ベクトル  $\{\bar{q}\}$  を次のように表すことができる。

$$\{\bar{Q}\} = [X_1 \ Y_1 \ Z_1 \ M_{x1} \ M_{y1} \ M_{z1} \ X_2 \ Y_2 \ Z_2 \ M_{x2} \ M_{y2} \ M_{z2}]^T$$

$$\{\bar{q}\} = [u_1 \ v_1 \ w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ \theta_{z1} \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ \theta_{z2}]^T \quad (1)$$

次に、非剛体モードのモデルを図-2 に示す。非剛体モードの節点荷重ベクトル  $\{Q\}$  および節点変位ベクトル  $\{q\}$  は以下ようになる。

$$\{Q\} = [M_{y1} \ M_{z1} \ X_2 \ M_{y2} \ M_{z2}]^T$$

$$\{q\} = [\theta_{y1} \ \theta_{z1} \ u_2 \ \theta_{y2} \ \theta_{z2}]^T \quad (2)$$

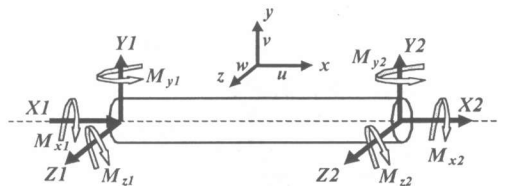


図-1 3次元はり要素と節点力（剛体モード）

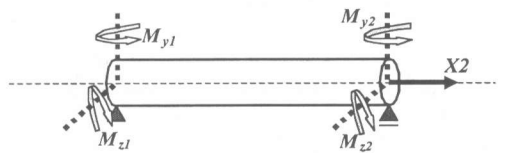


図-2 3次元はり要素と節点力（非剛体モード）

\*1 名古屋大学大学院 工学研究科土木工学専攻 工修（正会員）

\*2 名古屋大学大学院 工学研究科土木工学専攻教授 工博（正会員）

いま、図-3 のようにはりの任意断面における断面力を  $N(x), S_y(x), S_z(x), M_y(x), M_z(x)$ , 各々に対応する変位を  $\varepsilon(x), \gamma_y(x), \gamma_z(x), \phi_y(x), \phi_z(x)$  と表すと、断面力および変位ベクトル  $\{D(x)\}$ ,  $\{d(x)\}$  は(3)式で表される。

$$\begin{aligned} \{D(x)\} &= [N(x) \ S_y(x) \ S_z(x) \ M_y(x) \ M_z(x)]^T \\ \{d(x)\} &= [\varepsilon(x) \ \gamma_y(x) \ \gamma_z(x) \ \phi_y(x) \ \phi_z(x)]^T \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、断面力と変形を節点力及び節点変位に結びつけるための補間関数  $a(x), b(x)$  を導入して、次のように表す。

$$\begin{aligned} \Delta\{d(x)\} &= [a(x)] \cdot \Delta\{q\} \\ \Delta\{D(x)\} &= [b(x)] \cdot \Delta\{Q\} \end{aligned} \quad (4)$$

(4)式の  $[b(x)]$  を求めるには、モーメント分布の直線性を用いれば良い。図-4 を参照すれば、 $y$  軸まわりの曲げモーメントに関する補間関数  $[b_{my}(x)]$  として次の式が容易に得られる。

$$[b_{my}(x)] = \left[ \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad -\frac{x}{L} \right] \quad (5)$$

また、任意断面における荷重-変位関係は、断面 flexibility を  $f(x)$  とすれば、次のようになる。

$$\Delta\{d(x)\} = f(x) \cdot \Delta\{D(x)\} \quad (6)$$

(6)式を離散化すれば、次式を得る。

$$\int_L \delta\{D(x)\}^T \cdot [\Delta\{d(x)\} - f(x) \cdot \Delta\{D(x)\}] dx = 0 \quad (7)$$

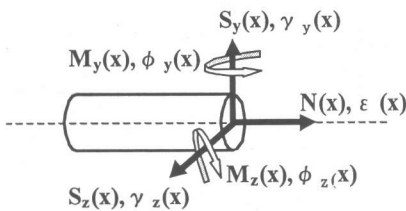


図-3 任意断面の断面力・ひずみ

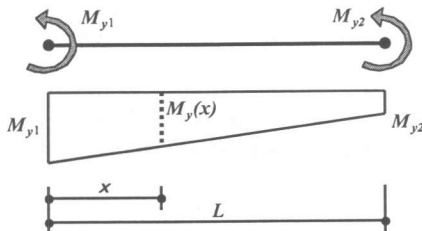


図-4  $y$  軸まわりのモーメント分布

一方、仮想変位の原理により次式が得られる。

$$\int_L \delta\{d(x)\}^T [\{D(x)\} + \Delta\{D(x)\}] dx = \delta\{q\}^T \{P\} \quad (8)$$

(4)-(8)式より、(9)式が導かれる。

$$\begin{aligned} [F]^{-1} \Delta\{q\} &= \Delta\{P\} \\ [F] &= \int_L [b(x)]^T \cdot f(x) \cdot [b(x)] dx \end{aligned} \quad (9)$$

ここで要素 Flexibility マトリクス  $[F]$  は、軸力及び  $y, z$  軸に関する曲げ・せん断に対して独立に得られる。

## 2.2 剛性マトリクスの誘導

剛体モードの荷重及び変位ベクトル  $\{Q\}, \{q\}$  は、非剛体モードベクトル  $\{Q\}, \{q\}$  と、それぞれ次のような線形関係を有する。

$$\begin{aligned} \{Q\} &= [t]\{Q\} \\ \{q\} &= [t]\{q\} \end{aligned} \quad (10)$$

また、図-5 のように考えると、次の関係が得られる。

$$\theta_1^* = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} \quad \theta_2^* = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} \quad (11)$$

$$M_1 = M_1^* \quad M_2 = M_2^* \quad (12)$$

$$S_1 = \frac{M_1 + M_2}{L} \quad S_2 = \frac{M_1 + M_2}{L}$$

(10)-(12)より、

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \theta_{1y}^* \\ \theta_{2y}^* \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & 1 & \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{1y} \\ \theta_{2y} \\ v_{1y} \\ v_{2y} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} M_1^* \\ M_2^* \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & 1 & \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

非剛体モードでは、 $\{q\} = [F_m]\{Q\}$  であるので、(10)式から次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} \{Q\} &= [F_m][t]^T \{q\} \\ \{Q\} &= [t][F_m][t]^T \{q\} \end{aligned} \quad (14)$$

すなわち、曲げに関する剛性マトリクス  $[K_m]$  は、次のようになる。

$$[K_m] = [t][F_m]^{-1}[t]^T \quad (15)$$

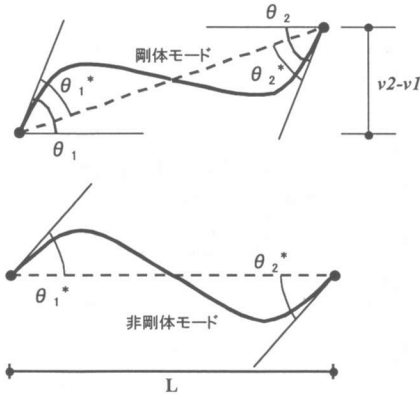


図-5 剛体モードと非剛体モード

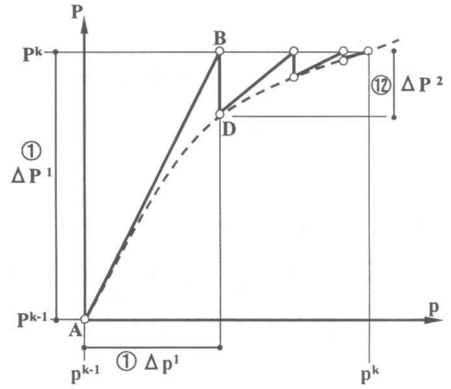


図-6 構造物レベルの収斂計算

### 3. 収斂アルゴリズム<sup>3)</sup>

#### 3.1 構造物レベルの収斂アルゴリズム

本研究で用いるFlexibility法の収斂手法は、構造物レベル・要素レベル・断面レベルの3段階を必要とする(図-7~図-9)。構造物レベルでの収斂は、荷重制御に基づき行われ、当該stepでの不平衡力が収斂条件を満たすまでiterationを行うことにより得られる。

#### 3.2 要素・断面レベルの収斂アルゴリズム

構造物レベルでの収斂に用いる内力は、次の手順で求める。

- ① 剛性方程式により、構造物レベルでの荷重増分 $\Delta P$ 、変位増分 $\Delta p$ を計算する。
- ②  $\Delta p$ から各要素の変位ベクトル $\Delta q$ を計算する。
- ③ 要素Flexibilityマトリクスより、要素の荷重増分 $\Delta Q$ を、 $\Delta Q = F \cdot \Delta q$ より求める。
- ④  $\Delta Q$ と補間関数 $b(x)$ から、断面力増分 $\Delta D$ を(4)式により求める。
- ⑤  $\Delta D(x)$ と断面Flexibility $f$ から断面変形増分 $\Delta d$ を計算する。
- ⑥ 全断面変形 $d_i + \Delta d$ により、断面力 $D_R$ ・断面剛性 $k$ ・断面Flexibility $f$ を計算する。
- ⑦ 断面不平衡力 $D_U$ の計算
- ⑧ 断面の不平衡変位 $r(x)$ を $r(x) = f \cdot D_U$ から計算する。
- ⑨ 各断面の不平衡変位を要素長に亘って積分し、要素の不平衡変位 $s$ を求める。

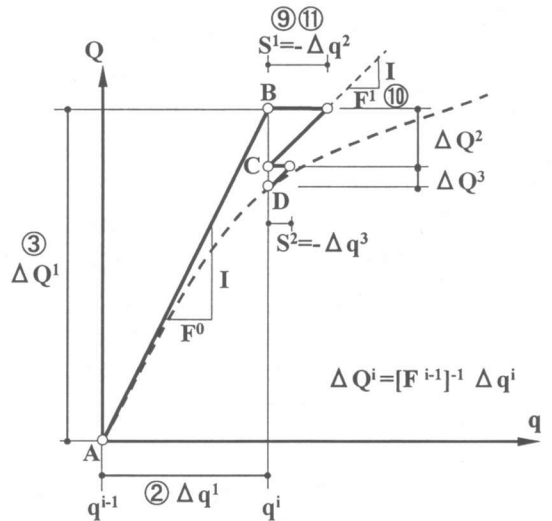


図-7 要素レベルの収斂計算

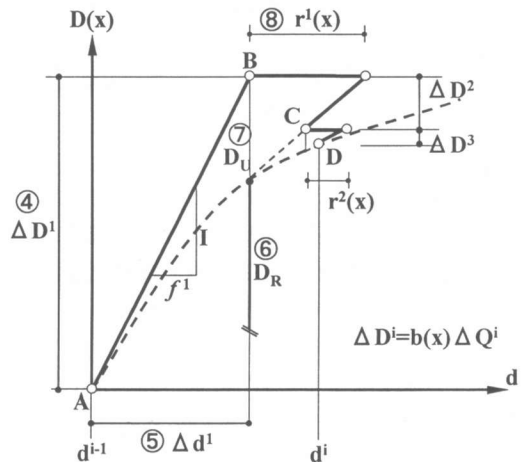


図-8 断面レベルの収斂計算

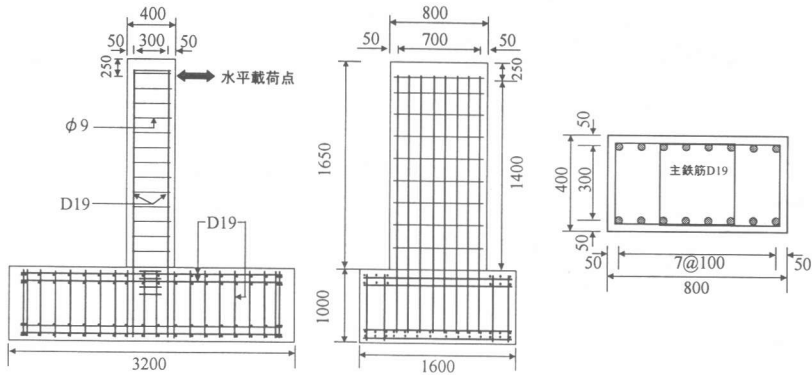


図-9 解析対象(太田 1979)

- ⑩ 要素剛性マトリクス[K]・要素 Flexibility マトリクス[F]を(9)式、(14)式により計算する。
- ⑪  $s$  が収斂条件を満たさない場合は、 $\Delta q = -s$  として収斂条件を満たすまで③から再度計算する。
- ⑫  $s$  が十分に小さい場合は、要素レベルでの収斂は完了し(点 D)、構造物の不平衡力を求める。不平衡力が収斂条件を満たさない場合、 $\Delta P = \Delta P_U$  として収斂条件を満たすまで①から再度計算する。

この手順を採用すれば、要素全体に亘ってのつりあいは厳密に維持されることとなり、はり要素の分割をせずに、精度の良い解析が可能となる。

#### 4. 単一RC柱の post-peak 挙動解析

##### 4.1 解析対象構造物

Flexibility 法による解析の有用性を示すため、本研究では太田により行われた単一柱形式のRC柱繰り返し実験<sup>4)</sup>の解析を行う。

実験供試体の諸元を図-9に示す。実験は、水平荷重載荷点(高さ 1.40m)に繰り返し载荷を与え、その水平変位を測定したものである。

なお、実験では繰り返し数の増加に伴い、斜めひび割れの発生に伴う著しい耐力低下が発生しているが、本解析は曲げに関する Flexibility 法の適用に主眼を置いているため、5-LOOP までの解析とする。

##### 4.2 材料特性

Flexibility 法を用いた解析においては、当該構造物の与えられた曲率に対する曲げモーメントおよび断面剛性 EI が必要となる。本解析では、これらの関係を Takeda モデル<sup>5)</sup>型の履歴により算定するが、

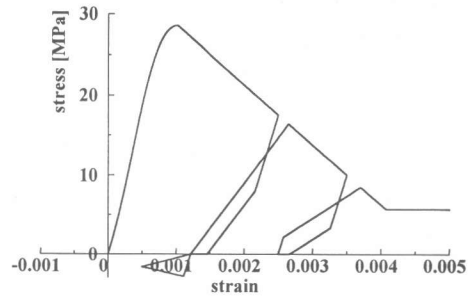


図-10 Darwin-Pecknold モデル

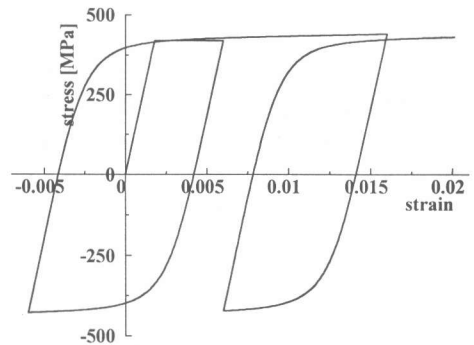


図-11 Menegotto-Pinto モデル

その際に必要となるクラック発生時のモーメント  $M_{cr}$ ・降伏時のモーメント  $M_y$  および対応する曲率  $\phi_x \cdot \phi_y$  の算定に Fiber-Model を用いた。これらの値の算定には、コンクリートおよび鉄筋各 Fiber の履歴が必要となるため、それぞれの構成則として Darwin-Pecknold モデル・Menegotto-Pinto モデル

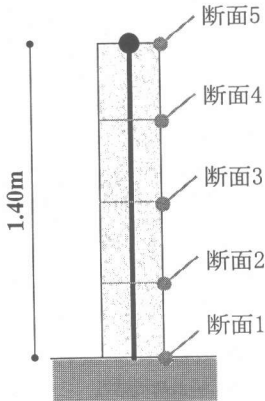


図-12 解析モデル

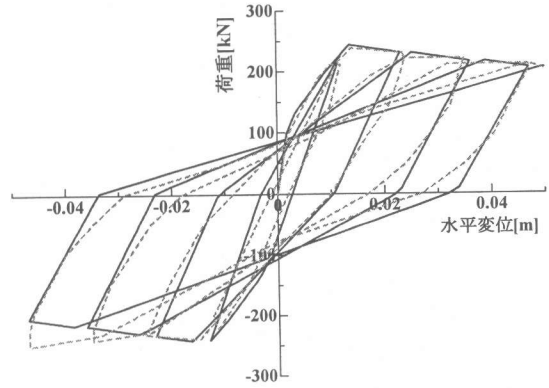


図-13 単一RC柱の解析結果 (実線:解析 / 破線:実験)

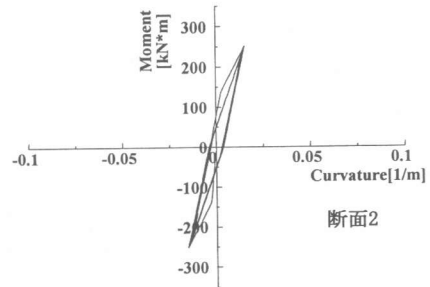
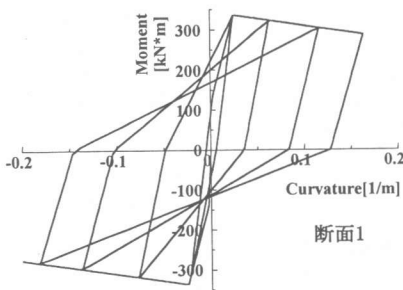


図-14 断面におけるモーメント-曲率履歴

を採用した(図-11・12)。

なお、構造物の Pre-Peak における解析だけでなく、Post-Peak 挙動の解析への適用を判断するため、Takeda モデルにおいては材料降伏後 0 とされている剛性を、Fiber-Model で得られた軟化剛性に置き換えることとした。

以上に基づき計算された各パラメータを用いて、Takeda-Model により  $M-\phi$  関係を決定した。具体的な値は、 $(\phi_{cr}, M_{cr}) = (0.0028, 140)$ 、 $(\phi_y, M_y) = (0.025, 336)$  (単位は  $[1/m]$ 、 $[kN \cdot m]$ )、軟化剛性は初期剛性の -5.0[%]である。

### 4.3 構造物のモデル化

構造解析に一般的に用いられる剛性法と異なり、Flexibility 法においては、はり要素であれば 1 要素で非線形解析を行うことができる。本解析では図-12 に示すような 1 要素の柱で解析を行う。断面力計算に用いる積分点の数は 5 点とする。

### 4.4 解析結果

図-13 に単一RC柱の解析結果を示す。図-13 より 1 要素で非常に単純化された履歴モデルを用いているにも関わらず、履歴を比較的精度良く捉えることが分かる。荷重が負の側において、3Loop 以降、硬化の現象が見られる実験値との間に挙動の違いが見られるが、これは Takeda モデルの軟化勾配が一定であることから生じたものである。

図-14 に断面の履歴を示した。最大モーメントの発生する断面 1 において軟化が生じると、断面 2 より上の断面はすべて除荷履歴を描く。Flexibility 法であれば、1 要素の解析であってもこのように要素の 1 部のみが軟化するような場合であっても、安定した解析が可能である。

## 5. フレーム構造要素のRC柱の post-peak 挙動解析

### 5.1 解析対象と解析モデル

フレームのような不静定次数の高い構造物の柱について Flexibility 法を適用する。単一柱と異なり、

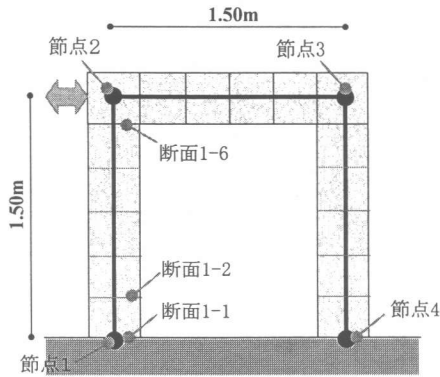


図-15 フレーム構造要素 (断面は0.3m×0.3m)

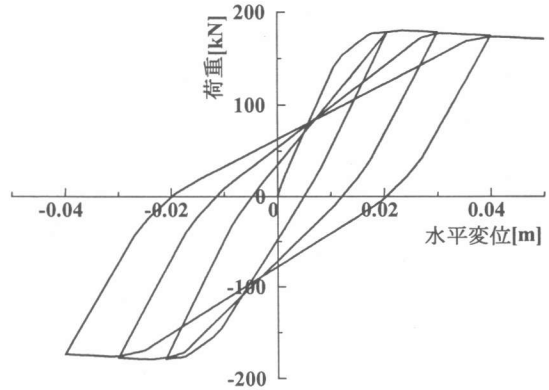


図-16 フレーム解析結果

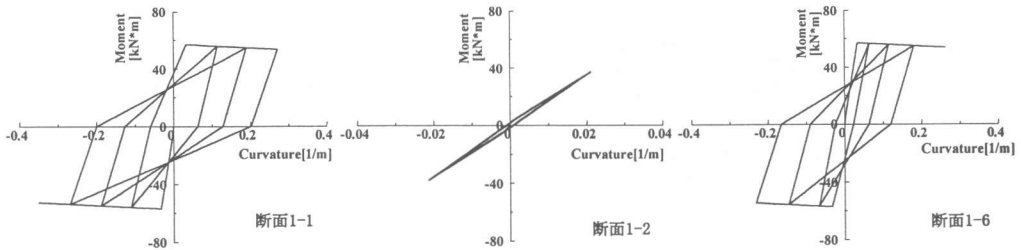


図-17 フレーム柱要素の履歴

このような場合は構造物レベルの収斂計算が必要となる。

解析対象は図-15 に示す2本の柱と1本のはりから構成されるフレームである。Flexibility 法では、この場合の節点2や節点3のような剛域について特別に要素をつけることなく、剛域の断面剛性を大きくすることにより1要素のまま解析できる。

## 5.2 解析結果

この構造物を解析した例を図-16 に示す。3要素4節点で剛域を考慮し、post-peak 領域までの安定した解析が得られている。また、図-17 には柱断面の履歴を示しているが、複数の断面が降伏して構造物全体の軟化につながるが現れている。

## 6. 結論

Flexibility 法を用いて実構造物レベルでの非線形動的解析を行った結果、以下の結論が得られた。

1) Flexibility 法を用いた場合、厳密な力の釣りを基礎としているため、post-peak 領域の解析も少ない要素数で可能である。

2) Takeda モデルのような簡便なモデルであってもある程度の精度を保ちつつ解析ができるので、要素数の減少とあわせて計算時間が大幅に短縮できる。大構造物の動的解析への有効性が期待できる。

## 参考文献

- 1) 土木学会中部支部：「土木構造物の耐震設計」に関する講習会，土木学会中部支部，2000
- 2) 木全博聖・チアホン・田邊忠顕：フレキシビリティ法を用いたRCはりの解析，コンクリート工学年次論文報告集 vol. 21-3, pp. 499-504, 1999
- 3) E. Spacone et al：Mixed Formulation of Nonlinear Beam Finite Element, Computers & Sciences Vol. 58, pp. 71-83, 1996
- 4) 太田実：繰返し荷重下における鉄筋コンクリート橋脚の挙動に関する実験的研究，土木学会論文報告集 292 号，1979
- 5) T. Takeda et al：Reinforced Concrete Response to Simulated Earthquakes, J. of Structural Division, ASCE, pp2557-2573, 1970