

# 論文 フレッシュコンクリートの粘塑性構成式とその流動特性に関する解析的検討

山田 義智\*1・大城 武\*2

**要旨:** 本研究では、フレッシュコンクリートの流動性状が、ひずみ速度にともない軟化性状を示す場合や、硬化性状を示す場合にも適応可能なフレッシュコンクリートの構成式を超過応力理論を用いて導く。この構成式を動的な効果を考慮した有限要素法に適用してスランプ試験を対象に流動解析を行い、ビンガムモデル、軟化モデル、硬化モデルの各流体モデルの流動特性について考察を行う。さらに本研究では、フレッシュコンクリートの流動特性をビンガムモデルで近似的に表わす場合の問題点についても解析例を挙げて具体的に検討する。

**キーワード:** 構成式, 超過応力理論, 有限要素法, スランプ試験

## 1. はじめに

コンクリート工事の合理化と品質管理をより一層進めるためには、フレッシュコンクリートの流動性をレオロジーの観点から整理し、その流動特性を的確に表わす構成式を確立する必要がある。

一般にフレッシュコンクリートの流動性は、ビンガムモデルで表されるとされている。筆者らは、ビンガムモデルを用いてフレッシュコンクリートの流動性を表す構成式を提案した<sup>1)</sup>。しかし、図-1に示すように粘塑性せん断ひずみ速度が大きくなると、軟化性状を示してビンガムモデルから乖離する場合がある。この現象は、フレッシュコンクリート内部の粒子間の構造破壊が進む事が一因と考えられる。山本ら<sup>2)</sup>の実験データによると、分離傾向にあるフレッシュコンクリートの場合にこのような軟化性状が著しい様に見受けられる。

このように塑性粘度が変化するコンクリートのフレッシュ性状を表わす場合、ビンガムモデルで定式化した構成式では不十分である。

そこで、本研究では、フレッシュコンクリートの流動性が軟化性状を有する場合や硬化性状

を有する場合等、様々な流体モデルに適応可能なフレッシュコンクリートの流動構成式を超過応力理論より導く。そして、この構成式を動的な効果を考慮した有限要素法に適用してスランプ試験を対象に各種流体モデルの流動解析を行う。そして、この解析により得られた知見を基に各種流体モデルの流動特性について考察する。

また、図-1に示すように、軟化性状を示すフレッシュコンクリートをビンガムモデルで近似した場合、得られる降伏値 $\tau_y$ および塑性粘度 $\mu$ が本来の流動特性をどの程度表せるかを検討する必要がある。この問題についても、本研究では解析例を示して考察する。

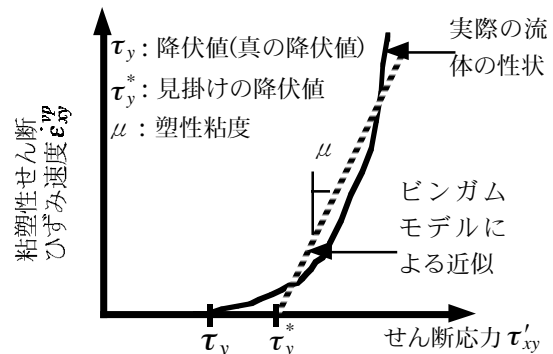


図-1 軟化性状を示す純せん断応力状態の粘塑性せん断ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{xy}^{vp}$ とせん断応力 $\tau'_{xy}$ 関係

\*1 琉球大学助手 工学部環境建設工学科 博士(工学) (正会員)

\*2 沖縄職業能力開発大学校 校長 Ph.D. (正会員)

## 2. 構成式の導出

### 2.1 Perzyna の超過応力理論

ここでは、図-2に示す様なある降伏関数 $F$ を考え、不動状態から流動状態への移行については次の条件を与える。

$$\left. \begin{array}{l} \text{不動領域} : F \leq 0 \\ \text{流動領域} : F > 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

Perzyna<sup>3)</sup>は、粘塑性ポテンシャル $Q$ による流れ則が成り立つものとして、以下の様な超過応力理論に基づく粘塑性理論を提案している。

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \gamma \langle \phi(F) \rangle \frac{\partial Q}{\partial \tau_{ij}} \quad (2)$$

ここで、 $\gamma$ は実験定数、 $F$ は降伏関数、 $\phi$ は材料の粘塑性性状により決まる $F$ の関数である。また、 $\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp}$ は粘塑性ひずみ速度、 $\tau_{ij}$ は応力を表す。ここで、 $\langle \cdot \rangle$ はMacauley記号で、式(3)に示すように流動状態の変化(式(1)参照)を表す。

$$\langle \phi(F) \rangle = \begin{cases} 0 & (F \leq 0) \\ \phi(F) & (F > 0) \end{cases} \quad (3)$$

### 2.2 フレッシュコンクリートの構成式

Perzynaの粘塑性理論では、粘塑性ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp}$ が降伏限を超えた超過応力の部分( $f-K$ )と不動領域の部分 $K$ の比( $f-K$ )/ $K$ に比例するものとしている。しかし、このモデルでは、不動領域 $K$ が非常に小さい場合、無限の粘塑性ひずみ速度が生じる。長滝ら<sup>4)</sup>がプレパックドコンクリート用注入モルタルのレオロジー定数を回転粘度計を用いて測定した結果、降伏値 $\tau_y$ が0に近い場合があり、Perzynaの粘塑性理論では不都合が生じる。そこで、ここでは、王・井上ら<sup>5)</sup>が提案したように、粘塑性ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp}$ が超過応力( $f-K$ )そのものに依存すると考えた。また、降伏関数 $F$ には次式のミーゼスの降伏関数を用いた。

$$F = \sqrt{J_2} - \tau_y \quad (4)$$

ここで、 $J_2 = \frac{1}{2} \tau_{ij}' \tau_{ij}'$ 、 $\tau_{ij}'$ は偏差応力を表す。

式(4)を式(2)に代入し、関連流れ則を適用すると、粘塑性ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp}$ は次式で表される。

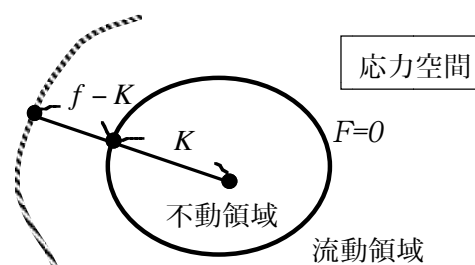


図-2 超過応力の概念

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \frac{\gamma}{2} \langle \phi(\sqrt{J_2} - \tau_y) \rangle \frac{\tau_{ij}'}{\sqrt{J_2}} \quad (5)$$

関数 $\phi$ を降伏関数 $F$ のべき乗( $\phi = F^n$ )とし<sup>6)</sup>、実験定数 $\gamma$ を塑性粘度 $\mu$ の逆数とすれば、 $F > 0$ の場合、式(5)は次式となる。

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \frac{1}{2\mu} (\sqrt{J_2} - \tau_y)^n \frac{\tau_{ij}'}{\sqrt{J_2}} \quad (6)$$

式(6)を偏差応力 $\tau_{ij}'$ -粘塑性ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp}$ の関係に書き直すと式(7)となる。この式が、フレッシュコンクリートの流動時の粘塑性構成式である。なお、本解析では $\sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp}}$ の値が流動限界値 $\pi_c$ 以下の場合、フレッシュコンクリートを不動状態として扱った。流動限界値 $\pi_c$ の設定は後の章に示す。

$$\tau_{ij}' = \frac{\tau_y + \left( \frac{2n\sqrt{I} / 2n\sqrt{1/4\mu^2}}{\sqrt{I}} \right) \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp}}{\sqrt{I}} \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} \quad (7)$$

ここで、 $I = \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp}$ である。

式(7)を純せん断応力状態のせん断応力 $\tau_{xy}'$ と粘塑性せん断ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{xy}^{vp}$ の関係(以下、 $\tau_{xy}'$ - $\dot{\varepsilon}_{xy}^{vp}$ 関係と略す)で表すと次式となる。

$$\tau_{xy}' = \tau_y + \left\{ \left( \dot{\varepsilon}_{xy}^{vp} \right)^{1/n} / (1/2\mu)^{1/n} \right\} \quad (8)$$

ここで、べき乗数 $n=1$ 、降伏値 $\tau_y=0$ とすると式(8)は式(9)となり、ニュートン流体を表す。

$$\tau_{xy}' = 2\mu \dot{\varepsilon}_{xy}^{vp} \quad (9)$$

さらに、べき乗数 $n=1$ 、降伏値 $\tau_y \neq 0$ の場合は、式(8)は式(10)となり、ビンガム流体を表す。

$$\tau_{xy}' = \tau_y + 2\mu \dot{\varepsilon}_{xy}^{vp} \quad (10)$$

また、べき乗数 $n \neq 1$ 、降伏値 $\tau_y \neq 0$ の場合

は、式(8)は非ビンガム流体を表す。これら式(8), (9), (10)各々の関係を図-3にまとめて示す。

### 3. 運動方程式の有限要素法による離散化

本研究は、フレッシュコンクリートのコンシステンシー試験として代表的なスランプ試験を解析対象として取り上げた。スランプ試験におけるフレッシュコンクリートの運動方程式は、軸対称問題として次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial D} &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{\tau_{zr}}{r} \right) + G_z \\ \frac{\partial v}{\partial D} &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r} \right) + G_r \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ここで、

$\frac{\partial u}{\partial D}$ : 実質微分,  $\rho$ : 密度(kg/m<sup>3</sup>)

$u, v$ :  $z$ 方向および $r$ 方向の流速(m/s)

$\tau_{ij}$ : 応力,  $G$ : 体積力

なお、本解析では、式(11)の実質微分項の非線形加速度項を省略し、線形部分の加速度項のみを考慮した。

式(11)の右辺は有限要素法により離散化し、左辺の加速度項(線形部分)については線形加速度法で離散化すると次式となる。

$$\left[ \frac{2}{\Delta t} [C] + [K] \right] \{u\}^{t+\Delta t} = [C] \left[ \frac{2}{\Delta t} \{u\}^t + \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\}^t \right] + \{G\} \quad (12)$$

ここで、

[C]: 質量マトリックス

[K]: 粘塑性マトリックス

$u$ : 節点速度,  $t$ : 時刻,  $\Delta t$ : 時間刻み

本解析では、粘塑性マトリックスの導出の際にペナルティ関数法を用いて非圧縮性を満足させる。また、質量マトリックスは集中化質量マトリックスとした。

要素には4節点アイソパラメトリック要素を使用し、ロッキングを防ぐため、選択低減積分を用いた。また、非線形剛性方程式の解法としては、直接反復法を用いた<sup>1)</sup>。

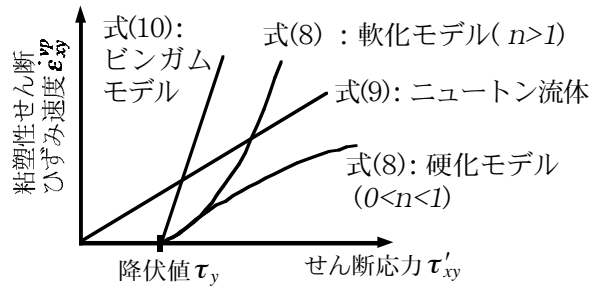


図-3 各流体モデルの  $\tau'_{xy} - \dot{\epsilon}_{xy}^{vp}$  関係

### 4. 流動限界値 $\pi_c$ の設定と解析の適用範囲

本解析では、粘塑性ひずみ速度  $\dot{\epsilon}_{xy}^{vp}$  が零であると応力  $\tau_{ij}$  が不定となり解析が行えない。そこで、図-4に示すように、ある流動限界値  $\pi_c$  を定め、その値より粘塑性ひずみ速度  $\dot{\epsilon}_{xy}^{vp}$  が小さい場合は、フレッシュコンクリートは非常に高い粘性を有する流体<sup>1)</sup>として、不動状態とした。

流動限界値  $\pi_c$  がフレッシュコンクリートの流動特性におよぼす影響を把握するため、スランプ12~18cm程度 of フレッシュコンクリートを対象に流動限界値  $\pi_c$  を0.05~0.20(1/s)の範囲で変化させて、スランプ試験のシミュレーションを行った。図-5には解析で用いたメッシュ分割と境界条件を示す。なお、流体モデルはビンガムモデルとした。

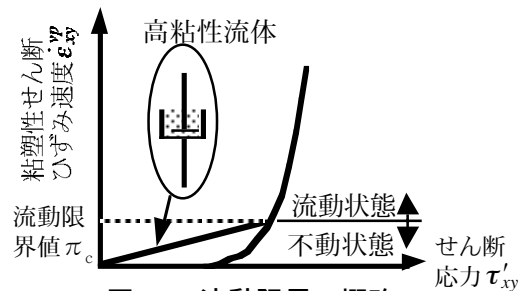


図-4 流動限界の概略

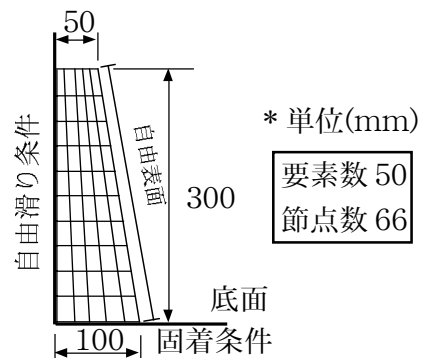


図-5 メッシュ分割図

評価対象の流動特性値としては、スランプSIと流動停止時間tsを用いた。表-1には、入力値（塑性粘度 $\mu$ 、降伏値 $\tau_y$ 、流動限界値 $\pi_c$ ）と出力値（流動特性値：スランプSI、流動停止時間ts）をまとめて示す。ここで、塑性粘度 $\mu$ は、普通コンクリートを対象として文献<sup>7)</sup>を参考に

決定した。降伏値 $\tau_y$ は、筆者らの過去の解析結果<sup>1)</sup>を基にスランプSIが約12cm程度および約18cm程度となるように設定した。

表-1から分かるように、流動限界値 $\pi_c$ が小さくなると流動停止時間tsが長くなる傾向があり、また、塑性粘度 $\mu$ のスランプSIにおよぼす影響も小さくなる。流動限界値 $\pi_c$ は小さい方が、降伏値を有する流体モデルとの乖離は小さいが、流動限界値 $\pi_c$ が0.05(1/s)では、流動停止時間tsが5秒以上となり、普通コンクリートのスランプ停止の時間としては経験的に長いものと思われる。そこで、流動停止時間tsが5秒未満で、かつ、降伏値を有する流体モデルとの乖離が小さいように、流動限界値 $\pi_c$ を0.10～0.15(1/s)の範囲とした。

図-6には、MAC法<sup>8)</sup>と本解析結果のスランピング曲線の比較例として、I-3、II-4モデルについて示す。ここで、流動限界値 $\pi_c$ は0.15(1/s)とし、ビンガムモデルを用いた。MAC法の流動速度が若干遅い傾向があるが、両手法による解析結果は良く対応している。

本有限要素法では、大変形の領域になると、アスペクト比（要素幅/要素高さ）が大きい要素が発生し、応力状態が正しく評価されない懸念生じる。そこで、文献<sup>9)</sup>を参考に、アスペクト比が15を超える要素が発生した場合には計算不適としたところ、スランプSIが約20cmを超えるような場合は、本解析の適用が不適であった。従って、高流動コンクリート等を対象とする場合は、要素のスミージング・リメッシュ機能を備えた解析法に改良する必要がある。

表-1 流動限界値 $\pi_c$ による流動特性値の変化

モデル名	$\tau_y$ (Pa)	$\mu$ (Pa·s)	$\pi_c=0.05$ (1/s)		$\pi_c=0.10$ (1/s)		$\pi_c=0.15$ (1/s)		$\pi_c=0.20$ (1/s)	
			SI (cm)	ts (s)	SI (cm)	ts (s)	SI (cm)	ts (s)	SI (cm)	ts (s)
I-1	750	50	18.7	2.75	18.6	1.43	18.6	0.99	18.5	0.78
I-2		150	18.7	6.80	18.6	3.75	18.4	2.69	18.3	2.13
I-3		250	18.6	7.41	18.4	4.21	18.2	3.04	17.9	2.41
I-4		400	18.5	8.11	18.1	4.67	17.7	3.34	17.3	2.65
II-1	1200	50	13.6	2.85	13.6	1.53	13.6	1.09	13.5	0.87
II-2		150	13.7	6.05	13.5	3.21	13.3	2.24	13.2	1.76
II-3		250	13.5	6.50	13.3	3.54	13.1	2.53	12.9	1.99
II-4		400	13.4	6.90	13.1	3.87	12.7	2.75	12.3	2.13

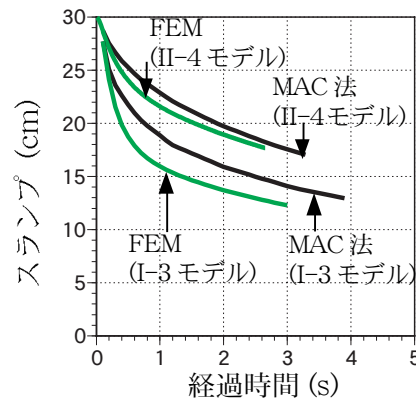


図-6 MAC法と本解析の比較

## 5 各種流体モデルの流動特性およびビンガムモデル近似の問題点

### 5.1 各種流体モデルの流動特性

各流体モデルのレオロジー定数の一覧を表-2にまとめて示す。ここで、モデルAは軟化性状を示すモデル、モデルBはビンガムモデル、モデルCは硬化性状を示すモデルである。モデルBはスランプSIが約18cmになるように降伏値 $\tau_y$ を与え、塑性粘度 $\mu$ も普通コンクリートの中間的な値を与えた。モデルAおよびモデルCは、べき乗数 $n$ を各々2.0と0.5に設定し、図-7に示すようにせん断応力750～4000Paの範囲でモデルBを近似するように決定した。なお、流体モデルは全て同一の降伏値 $\tau_y$ を用いた。

図-8は、各流体モデルの流動停止時のスランプ形状を自由表面上の要素節点の連結で示す。

表-2 各流体モデルのレオロジー定数

モデル名	$\tau_y$ (Pa)	$\mu$ (Pa·s)	$n$	流体モデル
モデルA	750.0	649794.8	2.0	軟化モデル
モデルB	750.0	250.0	1.0	ビンガムモデル
モデルC	750.0	5.48	0.5	硬化モデル

表-3には各流体モデルのスランプフローSf, スランプSl, Sf/Sl値, 流動停止時間tsをまとめて示す。

図-8および表-3より, 各流体モデルのスランプ形状の特徴が考察される。

モデルAは, モデルBに比べてスランプフローSfは若干大きく, スランプSlが小さい粘りの少ない変形を示す。一方, モデルCのスランプ形状は, モデルBと比べるとスランプSlは若干大きくなるが, スランプフローSfは同じでモデルBに比べて粘りのある変形を示す。このように, モデルAおよびモデルCはモデルBを近似するように決定したが, モデルBとは異なった変形特性を示した。

文献<sup>10)</sup>によると, スランプSlが18cm程度のコンクリートの場合, Sf/Sl値が1.7前後の値であれば適当なワーカビリティを有しており, この値が大きいと分離ぎみと判断され, 小さいと粘りがあると判断される。ここで, Sf/Sl=1.70を分離基準に仮定すると, モデルB, Cは分離がなく, モデルCの粘りが最も強いと判断される。一方, 軟化性状を示すモデルAはモデルB, Cに比べると分離ぎみであると判断される。実際のフレッシュコンクリートにおいても, 分離ぎみの場合は, 粒子間の構造破壊が進み易く, 軟化性状を示すものと思われる。従って, 軟化性状を示すモデルAによる解析結果がモデルB, Cの解析結果に比べて分離ぎみの傾向を示す事は, 合理的であると考えられる。しかし, 実際のフレッシュコンクリートでは粗骨材とモルタル間に完全分離が生じ, 連続体と見なせない場合がある。この様な場合, 連続体を扱う本解析では, その流動特性を表す事はできない。

## 5.2 ビンガムモデル近似の問題点

ここでは, 塑性粘度 $\mu$ がひずみ速度依存性を有する場合, その流動性をビンガムモデルで表す際の降伏値 $\tau_y$ の問題や, データ範囲の取り方に起因する流動特性の違いを解析的に検討する。

図-9に示すように $\tau'_{xy} - \dot{\epsilon}'_{xy}$ 関係データは, 前

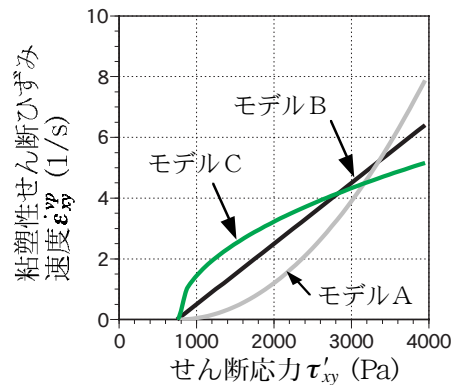


図-7 各流体モデルの $\tau'_{xy} - \dot{\epsilon}'_{xy}$ 関係

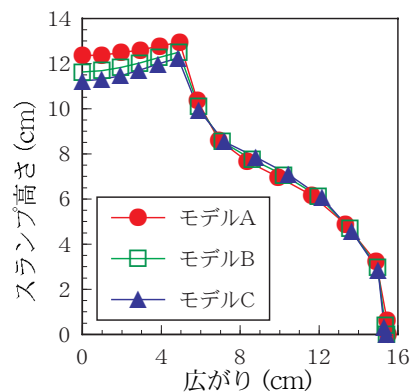


図-8 各流体モデルのスランプ停止時の形状

表-3 各流体モデルのスランプ特性値

モデル名	Sf (cm)	Sl (cm)	Sf / Sl	ts (s)
モデルA	31.0	17.6	1.76	3.20
モデルB	30.8	18.4	1.67	4.21
モデルC	30.8	18.8	1.64	4.50

節のモデルAを用いて, せん断応力750~3950Paの範囲で100Pa刻み間隔で発生させた。

ここで, 発生した全データを用いて, ビンガムモデルにて見掛けの降伏値 $\tau_y^*$ (図-1参照)および塑性粘度 $\mu$ を近似したモデルDでは, 表-4に示すように見掛けの降伏値 $\tau_y^*$ が真の降伏値(図-1参照)に比べ高めに評価される。この結果, スランプSlがモデルAに比べて過小評価される。

実験ではある範囲のせん断ひずみ速度領域でしか $\tau'_{xy} - \dot{\epsilon}'_{xy}$ 関係を測定できない場合がある。ここでは, 図-9においてひずみ速度が1.0(1/s)以下のデータしか得られてないものとした。この場合には, 真の降伏値あるいはこれに近い値が得られる事より, スランプSlはモデルAに近い

値が得られるが、一方で塑性粘度  $\mu$  が過大に評価されるために流動停止時間  $t_s$  が非常に長くなる (図-9 および表-4 のモデルE 参照)。

真の降伏値を用い、発生させた全データで塑性粘度  $\mu$  を近似した場合は前節で示したモデルB となる。この場合も、モデルA の流動特性を完全に表わす事は出来ないが (表-3 参照)、見掛けの降伏値  $\tau_y^*$  が大きいモデルD や、過大な塑性粘度  $\mu$  になるモデルE と比べると、スランプSl や流動停止時間  $t_s$  等の値は、ほぼ妥当である。

上述の様に、塑性粘度が変化する場合のフレッシュコンクリートの流動特性をビンガムモデルでは完全に表す事はできない。しかし、ビンガムモデルで近似的にその流動特性を表そうとする場合には、真の降伏値にできるだけ近い値を用いる事、および適切な範囲の  $\tau'_{xy} - \dot{\epsilon}_{xy}^{vp}$  関係のデータが必要である。

## 6. まとめ

本研究では、軟化性状および硬化性状も考慮可能なフレッシュコンクリートの粘塑性構成式を超過応力理論より導いた。この構成式を用いて有限要素法にてスランプ試験をシミュレートしたところ、粘りのある状態や分離ぎみの状態を再現できた。また、軟化あるいは硬化の流動性状を示すフレッシュコンクリートの流動特性をビンガムモデルでは完全に表す事はできないが、ビンガムモデルで近似的にその流動特性を表そうとする場合には、真の降伏値に近い値を用いる事、および適切な範囲の  $\tau'_{xy} - \dot{\epsilon}_{xy}^{vp}$  関係のデータが必要な事を示した。

## 参考文献

- 1) 山田義智 ほか：有限要素法によるフレッシュコンクリートの粘塑性流動解析，コンクリート工学年次論文集，Vol.23，No.2，pp.253-258，2001
- 2) 山本康弘 ほか：高流動コンクリートの流動特性の試験法(J型フロー試験)に関する研究，日本建築学会構造系論文集，No. 489，pp9-

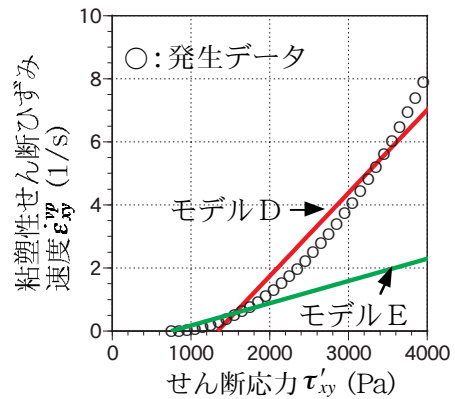


図-9 各データ範囲によるビンガム近似

表-4 レオロジー定数および流動特性値

モデル名	$\tau_y^*$ (Pa)	$\mu$ (Pa · s)	Sf (cm)	Sl (cm)	Sf/Sl	$t_s$ (s)
モデルD	1338.1	189.7	27.5	11.9	1.57	3.20
モデルE	750.0	708.1	30.0	17.4	1.72	5.19

16,1996.11

- 3) Perzyna, P. : The constitutive equations for work-hardening and rate sensitiv plastic, Proc. Vibration Problems, Warsaw, pp. 281-290, 1963
- 4) 長滝重義 ほか：プレパックドコンクリート用注入モルタルの流動特性に関する研究，セメント技術年報，No.28，pp.168-172，1975
- 5) 王志剛 ほか：溶融を考慮した粘塑性体の構成式とそれを用いた溶接過程の解析，日本機学会学会論文集(A編)，Vol.50，No.459，pp. 1900-1908，1984
- 6) 富田佳宏：数値弾塑性力学，養賢堂，pp.83-85，1990
- 7) 日本コンクリート工学協会：フレッシュコンクリートの力学モデル研究委員会報告，pp.4，図-1.1.4，1996.4
- 8) 山田義智 ほか：フレッシュコンクリート流動解析へのMAC法の適用，コンクリート工学年次論文集，Vol.20，No.1，pp.131-136，1998
- 9) 東町高雄：有限要素法のノウハウ，森北出版，pp.44-47，1997.12
- 10) 笠井芳夫 ほか：コンクリートの試験方(上)，技術書院，pp.144，1993