

# 論文 補強材の付着すべりを考慮したPC梁部材の大変形解析

越川 武晃<sup>\*1</sup>・井上 圭一<sup>\*2</sup>・上田 正生<sup>\*3</sup>・和田 俊良<sup>\*4</sup>

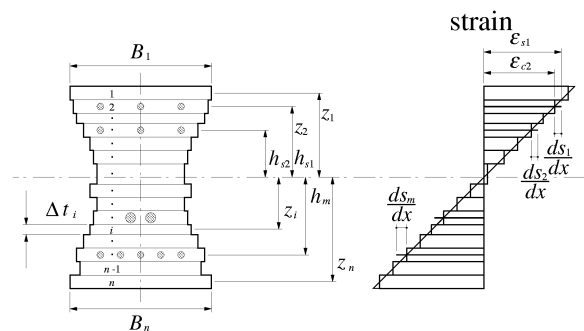
**要旨**：本論文は、コンクリートと補強材間に付着すべりを許した場合の、大変形領域をも取り扱うことが可能な有限要素法を用いたPC梁部材の材料非線形解析法について報告するものである。本論ではまず、その基本的な定式化の概略について記述し、次いで若干の数値計算例を掲げ、弾性解析ならびに材料非線形解析結果と既往の結果との比較により本解析法の妥当性を検証している。

**キーワード**：付着すべり, PC梁部材, 大変形, 材料非線形解析, 有限要素法

## 1. はじめに

通常のスパンー梁丈比を有するRC梁の場合には、大変形の影響を考慮する必要性は殆どないが、RC梁と比較すると遥かにスレンダーなスパンー梁丈比を有するPC梁の場合には、しばしば大変形領域をも取り扱うが必要になる。このような部材の大変形問題を対象とした解析を有限要素法を用いて行う場合には、有限変位理論の歪ー変位関係式に基づいて要素の剛性を導く手法が広く一般的に用いられている。これに対し、部材の変形と共に平行・回転移動する要素座標系を用いて、各荷重増分ステップごとに要素座標を更新していく手法を用いると微小変形理論のみで大変形解析を行うことが可能になるという観点から、Murray等<sup>2)</sup>は平板の大変形解析を行っており、有用な結果が報告されている。

本論文は、著者等が既往の研究において行った、補強材の付着すべりを考慮したPC梁部材の材料非線形解析法<sup>1)</sup>を更に発展させ、Murray等の手法を用いることにより各要素に関しては微小変形理論を成立させながら、全体として大変形領域をも容易に取り扱うことが可能なPC梁部材の材料非線形解析について述べたもので



図一 積層要素の断面記号と歪

ある。本論においては更に幾つかの数値計算例によって比較・考察が行われ、本解析手法の妥当性が検証されている。

## 2. 基本仮定事項

補強材の付着すべりを考慮したPC梁部材の大変形解析のために用いた基本仮定事項は以下のとおりである。

- (1) 変形前の部材軸方向を  $X$  軸、鉛直方向を  $Z$  軸とする全体座標系を座標空間上に固定し、部材の変形はその座標系に関して定義されるものとする(全体変位)。
- (2) 部材の大変形領域をも取り扱えるように、一荷重ステップ前の変形後の各梁要素の軸方向を  $x$  軸、 $x$  軸と鉛直な方向を  $z$  軸とする要素(局部)座標系を各要素ごとに設定し、それらの座標系

\*1 北海道大学大学院 工学研究科社会基盤工学専攻 (正会員)

\*2 北海道大学大学院助手 工学研究科社会基盤工学専攻 工博 (正会員)

\*3 北海道大学大学院教授 工学研究科社会基盤工学専攻 工博 (正会員)

\*4 北海道職業能力開発大学校講師 建築科 工博 (正会員)

は、部材の各荷重ステップの増加に伴う変形と共に平行・回転移動するものとする。

(3) 梁には軸力（緊張荷重を含む）と曲げが作用するものとし、各要素座標系に関しては平面保持の仮定に基づく微小変形理論が適用できるものとする。

(4) 解析には有限要素解析を用いるものとし、梁部材の断面を図-1に示すごとく梁丈方向に層状（ $n$ 層）に仮想分割して取り扱う積層要素で表示する。

(5) 梁断面内に  $m$  層配筋されている補強材とコンクリートの間には、要素軸方向の付着すべりが生じ得るものとし、ある位置における個々の補強材層のすべり変位は、平面が保持されるその位置のコンクリート部分からの相対変位で表示でき、また、付着応力  $\tau_{bi}$  とすべり変位  $S_i$  の間には、区間線形関係が成立するものとする。

(6) 梁要素内の個々のコンクリート層と補強材層の材料性状は、各要素の各層ごとに、その歪履歴の状態に応じて各解析ステップにおいて変化するが、個々の層内では、各層の中央位置の値で評価される一定の性状を有するものとする。

(7) 非線形解析手法としては荷重増分法を採用することにし、各荷重ステップごとに繰り返し計算によって解を求める。

### 3. 材料性状の仮定と構成関係

図-2は、解析に用いたコンクリートと補強材の材料性状、および補強材とコンクリート間の付着応力とすべりの構成関係を掲げたものである。尚、これらは既報告<sup>1)</sup>で使用したものと

同じである。

### 4. 要素座標系の有限要素法への定式化

ここでは、有限要素法への定式化の概要について記述することにする。

#### 4.1 変位場、および歪増分と応力増分

##### (1) 変位場

本解析を行うために要素座標系に関して設定する変位場は、梁の基準軸上の要素軸方向の変位  $u$  と、鉛直方向の変位  $w$ 、および梁断面内に  $m$  層配筋されている補強材層のすべり変位  $s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_m$  の計  $(2 + m)$  個の変位である。材料非線形解析に当たっては、これらは増分形式で表示されることになる。

##### (2) コンクリートの歪増分と応力増分

$x$  軸（要素軸）から  $z_i$  だけ離れた任意のコンクリート薄層  $i$  の歪増分  $\Delta\varepsilon_{ci}$  および応力増分  $\Delta\sigma_{ci}$  は、次式で表される。

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{ci} &= \Delta\varepsilon_o + z_i \Delta\phi \\ &= \frac{d\Delta u}{dx} + z_i \left( -\frac{d^2 \Delta w}{dx^2} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\Delta\sigma_{ci} = E_{ci} \Delta\varepsilon_{ci} \quad (2)$$

但し、 $\Delta\varepsilon_o$  : 梁の軸方向歪増分、 $\Delta\phi$  : 梁の曲率の増分量、 $E_{ci}$  : コンクリート層  $i$  の接線ヤング係数

##### (3) 補強材の歪増分と応力増分

任意の  $i$  層の補強材の歪増分  $\Delta\varepsilon_{si}$  および応力増分  $\Delta\sigma_{si}$  は、次のように表示される。

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{si} &= \Delta\varepsilon_o + h_{si} \Delta\phi + \Delta\varepsilon_{ssi} \\ &= \frac{d\Delta u}{dx} + h_{si} \left( -\frac{d^2 \Delta w}{dx^2} \right) + \frac{d\Delta s_i}{dx} \end{aligned} \quad (3)$$

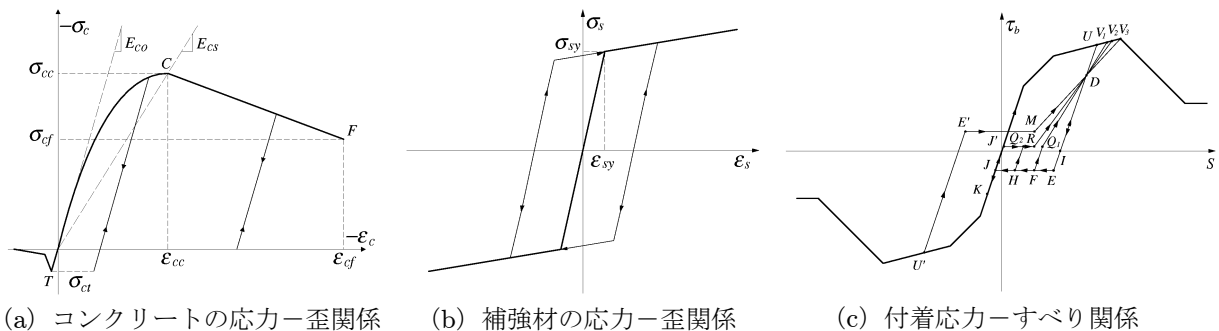


図-2 材料性状の仮定と構成関係

$$\Delta\sigma_{si} = E_{si}\Delta\varepsilon_{si} \quad (4)$$

但し、 $h_{si}$  : 補強材層  $i$  の  $x$  軸からの鉛直距離、 $\Delta\varepsilon_{ssi}$  : 補強材層  $i$  のすべり率の増分量、 $E_{si}$  :  $i$  層の補強材の接線ヤング係数

#### (4) 補強材のすべり変位増分と付着応力増分

任意の  $i$  層の補強材の付着境界に生じる付着応力増分  $\Delta\tau_{bi}$  とすべり変位増分  $\Delta s_i$  の間には、基本仮定により次の関係が成立する。

$$\Delta\tau_{bi} = K_{bi}\Delta s_i \quad (5)$$

但し、 $K_{bi}$  :  $i$  層の補強材の接線付着係数

#### 4.2 全ポテンシャル・エネルギー汎関数

前節で求めた PC 梁各部の歪と応力の関係式を用いると、積層表示され補強材の付着すべりを考慮した PC 梁部材のための増分表示された全ポテンシャル・エネルギー汎関数  $\Delta\Pi$  は、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta\Pi = & \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \left\{ \sum_{i=1}^n \Delta t_i B_i E_{ci} \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} \right\} \left( \frac{d\Delta u}{dx} \right)^2 \right. \\ & - 2 \left\{ \sum_{i=1}^n \Delta t_i B_i E_{ci} z_i \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} h_{si} \right\} \left( \frac{d\Delta u}{dx} \right) \left( \frac{d^2\Delta w}{dx^2} \right) \\ & + 2 \sum_{i=1}^m A_{si} E_{si} \left( \frac{d\Delta u}{dx} \right) \left( \frac{d\Delta s_i}{dx} \right) \\ & + \left\{ \sum_{i=1}^n \Delta t_i B_i E_{ci} z_i^2 \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} h_{si}^2 \right\} \left( \frac{d^2\Delta w}{dx^2} \right)^2 \\ & - 2 \sum_{i=1}^m A_{si} E_{si} h_{si} \left( \frac{d^2\Delta w}{dx^2} \right) \left( \frac{d\Delta s_i}{dx} \right) \\ & + \sum_{i=1}^m A_{si} E_{si} \left( \frac{d\Delta s_i}{dx} \right)^2 \\ & + \sum_{i=1}^m A_{bsi} K_{bi} \Delta s_i^2 \Big] dx \\ & - \int_0^L \left\{ \Delta P_u \left( \frac{d\Delta u}{dx} \right) + \Delta q_z \Delta w \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \sum_{i=1}^m \Delta P_{si} \left( \frac{d\Delta s_i}{dx} \right) \right\} dx \quad (6)$$

但し、 $L$  : 要素長、 $\Delta t_i$  : コンクリート薄層  $i$  の厚さ、 $B_i$  : コンクリート層  $i$  の梁幅、 $A_{si}^*$  :  $i$  層の補強材の換算断面積で  $A_{si}^* = A_{si} \left( 1 - \frac{E_{ci}}{E_{si}} \right)$ 、 $A_{si}$  :  $i$  層の補強材の断面積、 $A_{bsi}$  :  $i$  層の補強材の単位長さ当たりの付着表面積、 $\Delta P_u$  : 材軸方向の分布外力増分、 $\Delta q_z$  : 鉛直方向の分布荷重増分、 $\Delta P_{si}$  :  $i$  層の補強材の緊張荷重増分

#### 4.3 PC 梁要素の有限要素方程式

本論で使用する PC 梁要素の設定変位増分  $\Delta u, \Delta w, \Delta s_i$  (但し、 $i = 1 \sim m$ ) の変位関数を、それぞれ 1 次、3 次、1 次の関数で表現することにする。先の式 (6) にここで設定した変位関数を代入し、各節点変位ベクトル  $\{\delta_u\}, \{\delta_w\}, \{\delta_s\}$  (但し、 $i = 1 \sim m$ ) に関して変分をとり整理すると、要素座標系に関する有限要素方程式が下式のように得られることとなる。

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uw} & K_{us} \\ K_{uw}^T & K_{ww} & K_{ws} \\ K_{us}^T & K_{ws}^T & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_u \\ \delta_w \\ \delta_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta P_u \\ \delta P_w \\ \delta P_s \end{Bmatrix} \quad (7)$$

但し、 $\{\delta_s\}$  : すべての補強材の節点すべり変位  $s_i$  に関する節点変位ベクトル増分

#### 5. 非線形解析手法

本解析では図-3に示すように、変形前の部材について規定される全体座標系  $(X, Z)$  と、要素の変形に伴って平行・回転移動する要素座標系  $(x, z)$  とを設定し、部材にかけられた節点荷重と、要素座標系の変位による各要素の節点力と

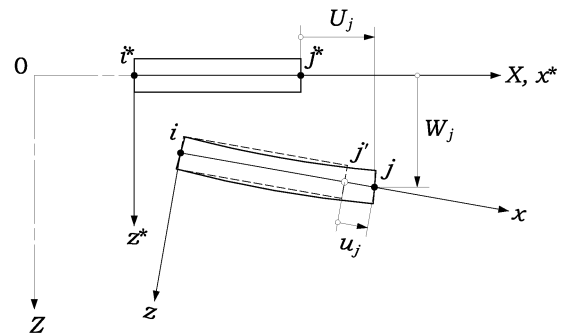


図-3 変形前後の座標と節点変位

が全体座標系に関して平衡するように、順次繰り返し計算を行うことにより、個々の要素内では微小変形を保持しながら、全体として部材の大変形が考慮されることになる。ここでは、本解析を行うための一連の解析手順について記述することにする。

### 5.1 要素座標系の節点力増分

今、ある荷重段階において平衡状態にある梁部材を考える。そこに新たな節点荷重増分がかけられたとし、任意のある要素の要素軸上の位置  $x^*$  における  $X$  軸、 $Z$  軸方向全体変位がそれぞれ  $U, W$  に変化したとすると、この位置における要素座標系の変位(要素節点変位)は、次のような関係から求められる。

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xX} & a_{xZ} \\ a_{zX} & a_{zZ} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} U - U_i + (1 - a_{xX}) x^* \\ W - W_i - a_{xZ} x^* \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{a_{xX} (a_{zX} + a_{zZ} \frac{dW}{dX})}{1 - a_{zX} (a_{zX} + a_{zZ} \frac{dW}{dX})} \quad (9)$$

但し、 $a_{12}$  : 1-2 座標軸間の方向余弦、 $U_i, W_i$  : それぞれ要素座標軸の原点である節点  $i$  の  $X$  軸・ $Z$  軸方向全体変位

補強材層のすべり変位は相対変位として表現されているので、座標軸の移動による影響を受けないものとする、これらの関係を用いて得られる現時点での要素節点変位、および一つ前の計算段階における要素節点変位から、節点荷重増分に対するこの梁要素の節点変位ベクトル増分を評価することができる。従って、これを先に導いた式(7)に代入すると、要素座標系に関する節点力増分  $\{\delta P_e\}$  が求まることになる。

### 5.2 全体座標系の非釣合い節点力と剛性マトリックス

各要素座標系に関して得られた節点力増分  $\{\delta P_e\}$  は、節点荷重増分と比較を行うために、各々全体座標方向に座標変換されることになる。これは通常座標変換マトリックス  $[T]$  を用いて容易に行うことができる。即ち、ある要素の  $i$

節点における節点力増分を  $\{\delta P_{ei}\}$  とすると、全体座標系の節点力増分  $\{\delta P_{gi}\}$  は、次のように表される。

$$\begin{aligned} \{\delta P_{gi}\} &= [T]^T \{\delta P_{ei}\} \\ &= \begin{bmatrix} a_{xX} & a_{zX} & 0 & 0 \\ a_{xZ} & a_{zZ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{\delta P_{ei}\} \quad (10) \end{aligned}$$

上式を全要素の全節点について適用し、これらと節点荷重増分との差を求めると、部材の大変形に伴う非釣合い節点力が算出されることになる。

一方、先の節点変位ベクトル増分によって、部材を構成するコンクリートと補強材、および付着応力すべりの構成関係の非線形性に起因した非釣り合い応力も生じることになる。これらは仮想仕事の原理を用いて等価節点力にされ、これを全体座標方向に座標変換した後に、先の非釣り合い節点力と共に次の計算段階で部材に節点荷重としてかけられることになる。

各要素の剛性マトリックスも同様に、下式のように全体座標系に関して変換され、これを部材全体に対して重ね合わせると、次の計算段階に用いられる新たな全体剛性マトリックスが得られることになる。

$$[K_{gi}] = [T]^T [K_{ei}] [T] \quad (11)$$

但し、 $[K_{gi}], [K_{ei}]$  : それぞれ任意の要素の  $i$  節点に対応する全体座標系および要素座標系の剛性マトリックス

上記の一連の計算は、先の大変形および材料の非線形性による非釣り合い節点力が十分小さくなるまで繰り返し行われ、平衡状態に達すると新たな節点荷重増分が部材にかけられることとなる。

## 6. 数値計算例

ここでは、本報で展開した補強材の付着すべりを考慮した PC 梁部材の大変形解析法の妥当性を明らかにするため、本解析法による数値計算例を掲げ、弾性解析および材料非線形解析結

果と、既往の結果との比較・検討を行うこととする。

### 6.1 弾性解析による本解析手法の検討

本節では、本解析手法による解の精度を検証するため、材料性状を弾性と仮定した場合の解析を行うことにする。図-4は、断面が一樣な片持ち梁の先端に鉛直荷重  $P$  が作用したときの荷重-変形関係を示したものである。この図の縦軸は荷重を、横軸は梁先端の鉛直変位をそれぞれ無次元化して表示してある。同図より、本解析値は文献5)による解とほぼ同一の曲線形状を示しており、十分な妥当性を有していることが判る。

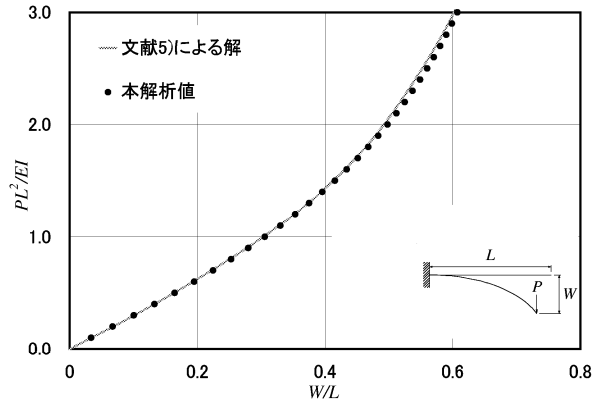


図-4 一樣な片持ち梁の荷重-変形関係

次に、梁断面に補強材を配した場合の、その付着すべりが本解析結果に及ぼす影響について見てみることにする。図-5にここで設定したモデル梁の概要と仮定材料性状を示す。図からも明らかなように、この梁は矩形断面を有するRC片持ち梁をモデル化したものであり、ここでは補強材の付着すべり係数  $K_b$  のみを  $10^4 \sim 10^0 N/mm^3$  と変化させた5種の解について検討を行ってみる。

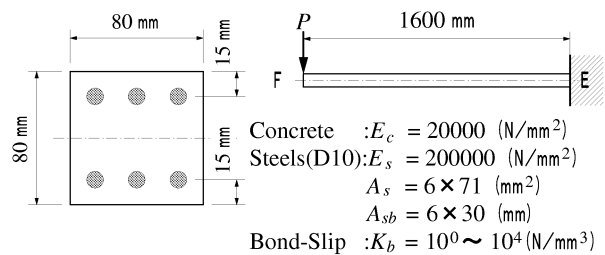


図-5 モデル片持ち梁の概要と仮定材料性状

図-6は、荷重とこの梁先端の鉛直変位の関係を、全5種の解析結果についてまとめて示したものである。この結果より、付着係数が  $10^4 \sim 10^2 N/mm^3$  では解析値に差はほとんど見られないが、 $10^1, 10^0 N/mm^3$  では補強材の付着すべりによって生じる梁の鉛直変位の差をはっきりと読み取ることができ、ここに本研究の目的とする材料性状が刻々と変化する材料非線形解析を行うにあたって、この付着すべり現象を適切にモデル化し解析に取り入れることの重要性を窺い知ることが出来る。

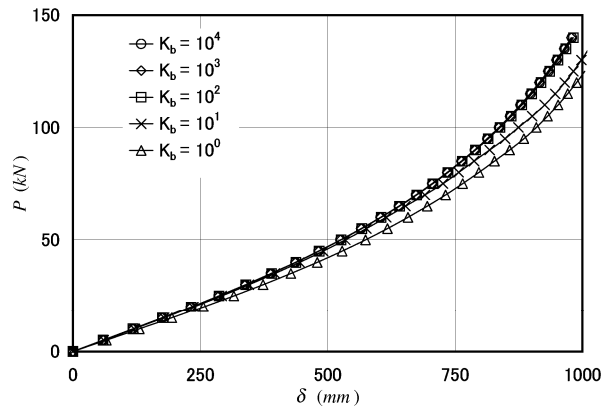


図-6 モデル片持ち梁の荷重-変形関係

### 6.2 Aroni 等の実験値<sup>5),6)</sup> との比較

本解析の材料非線形領域における妥当性を検証する一例として、Aroni 等<sup>5)</sup>の行った偏心軸圧縮力(偏心距離:  $e = 101.6mm$ )を受けるPC柱試験体を対象に計算を行うことにする。図-7に、PC柱試験体(試験体名:  $A_230c5$ )の概要と材料性状を示す。この試験体には、プレテン

ション方式でプレストレスが導入されており、載荷直前のコンクリートの平均圧縮応力は  $15.6 N/mm^2$  である。計算時には、補強材のプレストレスが試験体の解析に先だって導入され、ここではコンクリート断面に先の圧縮応力が生じるようなプレストレス力を、これと等価な節点力に置換して試験体に作用させている。

図-8には、スパン中央点における荷重-変位曲線 ( $P-\delta$  曲線) を、Aroni 等の実験値と本

解析値，および大変形の影響を考慮しなかった場合の解析値とを比較して示した。これらの結果からも知り得るように，本解析値は実験値に比べ最大耐力が若干高めに評価されているものの，全体として Aroni 等の実験曲線に良好に追随している。また本解析値と大変形の影響を考慮していない解析値とは明らかに異なった傾向を示しているが，この試験体のような丈に比してスパンが比較的大きい部材に対しては， $P-\delta$  効果が自動的に考慮される大変形解析が必要であることを看取することが出来る。同図には，2次の項まで含めた歪-変位の関係式を用いて定式化を行った Kang 等<sup>6)</sup>の解も併記してあるが，本解析値はこれと比べても何ら遜色ない精度を有している。

## 7. まとめ

本論文では，「コンクリートと補強材間に付着すべりを許した場合の，大変形領域をも取り扱い可能な PC 梁部材の材料非線形解析法」について論じた。即ち，この問題のための全ポテンシャル・エネルギー汎関数を導き，それらを用いて有限要素法への定式化を行った。更に，本解析法による数値計算例を掲げ，弾性解析ならびに材料非線形解析結果と既往の結果との比較により，本解析法の有用性を明らかにした。今後は，この解析法を PC フレームの繰返し荷重-変形応答をも適切に評価しえるような，より精度の高い材料非線形解析へと拡張・発展させる予定である。

## 参考文献

- 1) 松倉満智子，上田正生，内山武司，土橋由造：緊張鋼材の付着すべりを考慮したプレストレストコンクリート梁部材の材料非線形解析，コンクリート工学年次論文報告集，Vol.17, No.2, pp.709-712, 1995
- 2) Murray, D. W. and Wilson, E. L. : Finite-Element Large Deflection Analysis of Plates, ASCE, Vol.95, No.EM1, pp.143-165,

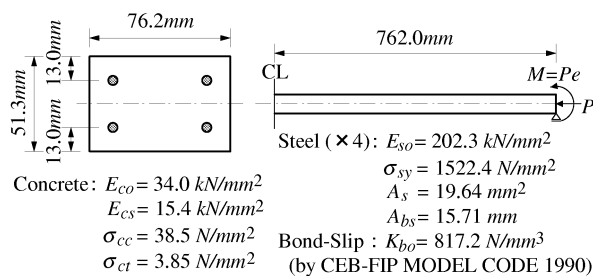


図-7 PC柱の概要と材料性状

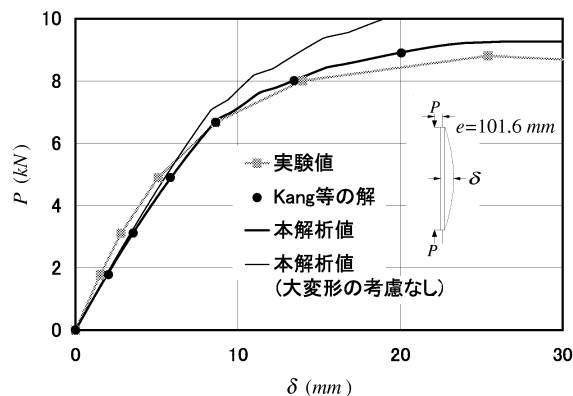


図-8 柱中央点における荷重-たわみ曲線

Feb.1969

- 3) 谷資信：建築物の構造解析シリーズII 骨組構造の解析，技報堂出版株式会社，pp.186-187, 1976.12
- 4) 山田嘉昭：マトリックス法の応用，財団法人東京大学出版会，pp.181-206, 1972.6
- 5) Aroni, S. : Slender Prestressed Concrete Columns, ASCE, Vol.94, No.ST4, pp.875-904, Apr.1968
- 6) Kang, Y. J. and Scordelis, A. C. : Nonlinear Analysis of Prestressed Concrete Frames, ASCE, Vol.106, No.ST2, pp.445-462, Feb.1980
- 7) 越川武晃，上田正生，内山武司，和田俊良：補強材の付着すべりを考慮したプレストレスト・コンクリート・チモシェンコ梁の材料非線形解析，コンクリート工学年次論文集，Vol.23, No.3, pp.301-306, 2001.6