

# 論文 単層偏心建築物の等価 1 自由度系縮約

三浦 直之\*1・倉本 洋\*2・三宅 辰哉\*3

**要旨** : 1 方向の地震動入力を受ける 1 軸および 2 軸偏心 RC 造単層建築物を対象として, 静的非線形荷重増分解析を併用した等価 1 自由度系縮約方法と地震応答解析を併用した等価 1 自由度系縮約法を提案する。また, 単層偏心建築物に対する静的非線形荷重増分解析と時刻歴地震応答解析の結果を比較し, 両者の応答性状の相違についても考察を行う。

**キーワード** : 単層偏心系, 等価 1 自由度系, 荷重増分解析, 地震応答解析, 限界耐力計算

## 1. はじめに

限界耐力計算では建築物において 1 次振動モードが支配的であると仮定し, 等価 1 自由度系に置換して最大応答点を評価する方法が用いられている。しかし, 偏心層を有する建築物に対しては, 従来の許容応力度等計算で用いられてきた偏心率に応じた数値  $F_e$  を用いてその影響を考慮している。すなわち, 当該建築物の等価 1 自由度系縮約の際に, 偏心層の外力を  $F_e$  倍して静的非線形荷重増分解析を行うという方法を採用している<sup>1)</sup>。この方法は周知のように, 弾性剛性偏心に立脚した略算的なものであり, 建築物が塑性化を伴う場合等には適切な等価 1 自由度系に縮約する方法であるとはいえない。つまり, 偏心建築物に関してはねじれを考慮した等価 1 自由度系による応答評価手法が確立されていない状況にある。

そこで, 本論文では限界耐力計算の改善を目的とし, 1 軸および 2 軸偏心を伴う RC 造単層建築物を対象に, 静的非線形荷重増分解析を併用した等価 1 自由度系縮約方法 (静的縮約法) と地震応答解析を併用した等価 1 自由度系縮約方法 (動的縮約法) を提案する。また, 単層偏心建築物における静的非線形荷重増分解析と時刻歴地震応答解析の応答性状の相違についても考察を行う。

## 2. 静的縮約法

### 2.1 単層 1 軸偏心建築物の静的縮約法

1 方向の地震動入力を受ける単層 1 軸偏心建築物の場合,  $x$  方向の振動と  $z$  軸まわりの回転は連成し,  $y$  方向の振動は独立する (図-1)。地震動を  $x$  方向からのみ入力した場合, 連成する  $x$  方向と  $z$  軸まわりの振動方程式は次式で表される。

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = -[M]\{1\}\ddot{x}_0 \quad (1)$$

ここに,

$[M]$  : 質量マトリクス

$[C]$  : 減衰マトリクス

$[K]$  : 剛性マトリクス

$\{\delta\} = \{\delta_x \ \delta_z\}^T$  : 変位ベクトル

$\{1\} = \{1 \ 0\}^T$

$\ddot{x}_0$  :  $x$  方向の地動

加速度

とする。また, 変位  $\delta_z$  は重心から回転半径  $i$  の位置での変位を表し, 回転角  $\theta$  とは次式の関係がある。

$$\delta_z = i\theta \quad (2)$$

ところで, 式 (1) の解はモードの重ね合わせにより, 次式のように表される。

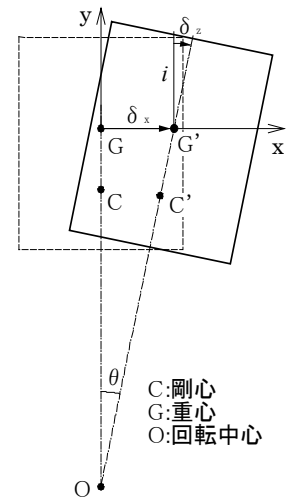


図-1 1 軸偏心

\*1 豊橋技術科学大学 大学院工学研究科建設工学専攻 (正会員)

\*2 豊橋技術科学大学 建設工学系 助教授 博士 (工学) (正会員)

\*3 日本システム設計 (株) 専務取締役 博士 (工学)

$$\{\delta\} = \sum_{s=1}^2 \beta_s \{u_s\} S_d \quad (3)$$

ここで、 $\beta_s$ 、 $\{u_s\}$ および $S_d$ はそれぞれs次モードに対応する刺激係数、モードベクトルおよび代表応答変位を表し、 $\beta_s$ と $\{u_s\}$ はそれぞれ式(4)および(5)で定義される。

$$\beta_s = \frac{\{u_s\}^T [M] \{1\}}{\{u_s\}^T [M] \{u_s\}} = \frac{u_s}{u_s^2 + w_s^2} \quad (4)$$

$$\{u_s\} = \{u_s \quad w_s\}^T \quad (5)$$

1次モードにおける変位は式(3)より、

$$\{\delta\} = \beta_1 \{u_1\} S_d \quad (6)$$

で与えられる。また、モードベクトル $\{u_1\}$ は

$$\{u_1\} = \{\delta\} / (\beta_1 S_d) \quad (7)$$

となり、 $\{\delta\} = \{\delta_x \quad \delta_z\}^T$ および $\{u_1\} = \{u \quad w\}^T$ であることを考慮すると、式(4)より等価1自由度系における代表応答変位 $S_d$ は式(8)となる。

$$S_d = \frac{{}_1\delta_x^2 + {}_1\delta_z^2}{{}_1\delta_x} \quad (8)$$

ところで、復元力ベクトル $\{R\}$ を

$$\{R\} = [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} \quad (9)$$

とすると、式(1)は次式のように表される。

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + \{R\} = -[M]\{1\}\ddot{x}_0 \quad (10)$$

式(10)に式(3)を代入し、前から $\beta_1 \{u_1\}^T$ を乗じ直交性を考慮すると、等価1自由度系における振動方程式として次式を得る。

$${}_1\bar{M} \cdot \ddot{S}_d + {}_1R_{eq} = -{}_1\bar{M} \cdot \ddot{x}_0 \quad (11)$$

ここで、 ${}_1\bar{M}$ 、 ${}_1R_{eq}$ は等価1自由度系における等価質量および等価復元力を表しており、次式で定義される。

$${}_1\bar{M} = m_1 \beta_1 u = \frac{m_1 \delta_x^2}{\delta_x^2 + \delta_z^2} \quad (12)$$

$${}_1R_{eq} = \beta_1 \{u_1\}^T \{R\} = \beta_1 \{u_1\}^T \{Q\} (= {}_1Q) \quad (13)$$

ここで、 $\{Q\} = \{Q_x \quad Q_z\}^T$ であり、 $Q_x$ および $Q_z$ はそれぞれ $\delta_x$ 、 $\delta_z$ に対応するせん断力である。また、 ${}_1Q$ は等価1次せん断力(代表せん断力)である。等価1自由度系における応答加速度 ${}_1S_d$ を用いると、式(11)は次式ようになる。

$${}_1R_{eq} = -{}_1\bar{M} (\ddot{S}_d + \ddot{x}_0) = -{}_1\bar{M} \cdot S_d \quad (14)$$

式(12)～(14)より、等価1次自由度系にお

ける応答加速度 ${}_1S_d$ は次式で与えられる。

$${}_1S_d = \frac{{}_1R_{eq}}{{}_1\bar{M}} = \frac{\beta_1 \{u_1\}^T \{Q\}}{m_1 \beta_1 u} \quad (15)$$

ところで、重心まわりのモーメントを $M_z$ とすると次式の関係が成り立つ。

$$M_z = -I\ddot{\theta} \quad (16)$$

ここで、 $I$ は回転慣性であり、式(17)の関係がある。

$$I = m \cdot i^2 \quad (17)$$

さらに、式(2)、(16)および(17)より、

$$M_z = -m \cdot \ddot{\delta}_z \cdot i \quad (18)$$

を得る。ここで、 $m \cdot \ddot{\delta}_z$ は、回転慣性による外力であり、 $Q_z$ と以下の関係がある。

$$m \cdot \ddot{\delta}_z = -Q_z \quad (19)$$

したがって、式(18)および(19)より、

$$Q_z = M_z / i \quad (20)$$

が成立し、式(15)および(20)より次式が得られる。

$${}_1S_d = \frac{1}{m} \left( Q_x + \frac{\delta_z}{\delta_x} \cdot \frac{M_z}{i} \right) \left( = \frac{{}_1Q}{{}_1\bar{M}} \right) \quad (21)$$

式(8)および(21)を用いれば、単層1軸偏心建築物の立体静的増分解析結果の各ステップにおけるx方向のせん断力 $Q_x$ 、重心まわりのモーメント $M_z$ および変位 $\delta_x$ 、 $\delta_z$ からCapacity Spectrumを描くことができる。

## 2.2 単層2軸偏心建築物の静的縮約法

単層2軸偏心建築物の場合、x方向、y方向およびz軸まわりの3つの振動が連成する(図-2)。

そのため、式(1)における変位ベクトル $\{\delta\}$ は

$$\{\delta\} = \{\delta_x \quad \delta_y \quad \delta_z\}^T \quad (22)$$

となる。また、前節と同様に地震動の入力はx方向のみとする。このとき、振動方程式の解はモードの重ね合わせにより次式で与えられる。

$$\{\delta\} = \sum_{s=1}^3 \beta_s \{u_s\} S_d \quad (23)$$

ここで、 $\beta_s$ と $\{u_s\}$ はそ

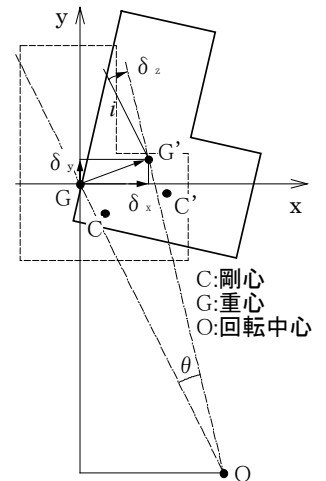


図-2 2軸偏心

それぞれ式 (24) および (25) で定義される。

$${}_s\beta = \frac{\begin{Bmatrix} u \\ u \end{Bmatrix}^T [M] \begin{Bmatrix} 1 \\ u \end{Bmatrix}}{\begin{Bmatrix} u \\ u \end{Bmatrix}^T [M] \begin{Bmatrix} u \\ u \end{Bmatrix}} = \frac{{}_s u}{{}_s u^2 + {}_s v^2 + {}_s w^2} \quad (24)$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}^T \quad (25)$$

単層 1 軸偏心建築物の場合と同様に式を展開すると、等価 1 自由度系における等価質量  ${}_1\bar{M}$ 、代表応答変位  ${}_1S_d$  および応答加速度  ${}_1S_a$  は次式より与えられる。

$${}_1\bar{M} = m \cdot {}_1\beta \cdot u = \frac{m \cdot \delta_x^2}{{}_1\delta_x^2 + {}_1\delta_y^2 + {}_1\delta_z^2} \quad (26)$$

$${}_1S_d = \frac{{}_1\delta_x^2 + {}_1\delta_y^2 + {}_1\delta_z^2}{{}_1\delta_x} \quad (27)$$

$${}_1S_a = \frac{{}_1\beta \{u\}^T \{Q\}}{m \cdot {}_1\beta \cdot u} \quad (28)$$

ここで、 $\{Q\} = \{Q_x \ Q_y \ Q_z\}^T$  となるので、式 (28) は次式で表される。

$${}_1S_a = \frac{1}{m} \left( Q_x + \frac{{}_1\delta_y}{{}_1\delta_x} \cdot Q_y + \frac{{}_1\delta_z}{{}_1\delta_x} \cdot \frac{M_z}{i} \right) \quad (29)$$

単層 2 軸偏心建築物の場合では、式 (27) および (29) を用いることで Capacity Spectrum を描くことができる。

### 3. 動的縮約法

#### 3.1 単層 1 軸偏心建築物の動的縮約法

ここでは 1 方向入力を受ける単層 1 軸偏心建築物の動的縮約法を示す。本論では文献 2) に示された動的縮約法と同様に、参照モード系を与えることで動的縮約を行うものとする。具体的には、静的非線形荷重増分解析を併用して、地震応答解析結果に基づいて後述の式 (34) および (35) により縮約した等価 1 自由度系の最大応答変位に相当する静的非線形荷重増分解析結果の荷重ステップを求め、そのステップでの 1 次刺激関数を式 (30) および (31) によって評価することにより参照モード系を得る。

$${}_1\beta \cdot u = \frac{{}_1\delta_{x\max}^2}{{}_1\delta_{x\max}^2 + {}_1\delta_{z\max}^2} \quad (30)$$

$${}_1\beta \cdot w = \frac{{}_1\delta_{x\max} \cdot {}_1\delta_{z\max}}{{}_1\delta_{x\max}^2 + {}_1\delta_{z\max}^2} \quad (31)$$

ここで、 ${}_1\delta_{x\max}$  および  ${}_1\delta_{z\max}$  は静的非線形荷重増分解析において  ${}_1\beta \{u\}$  を採用した荷重ステップでの各変位を表す。なお、最初は等価 1 自由度系が得られていないので、単層偏心系における最大応答変形に相当する静的非線形荷重増分解析結果の荷重ステップでの  ${}_1\beta \{u\}$  を仮定して縮約し、その後 1, 2 回同様の手順を繰り返して、 ${}_1\beta \{u\}$  を求めるものとした。

ところで、式 (6) より、

$${}_1S_d(t) = \frac{\{u\} \delta(t)}{{}_1\beta \{u\}} \quad (32)$$

の関係が得られる。ここで、式 (32) の右辺の分母および分子に  ${}_1\beta \{u\}^T [M]$  を左から乗じると、

$${}_1S_d(t) = \frac{{}_1\beta \{u\}^T [M] \{u\} \delta(t)}{{}_1\beta \{u\}^T [M] \{u\}} = \frac{{}_1\beta \{u\}^T \{u\} \delta(t)}{{}_1\beta \cdot u} \quad (33)$$

を得る。ここで直交性を考慮すると、 ${}_1\beta \{u\}^T \{u\} \delta(t) = {}_1\beta \{u\}^T \{\delta(t)\}$  となり、次式が得られる。

$${}_1S_d(t) = \frac{{}_1\beta \{u\}^T \{\delta(t)\}}{{}_1\beta \cdot u} \quad (34)$$

ここで、 $\{\delta(t)\} = \{\delta_x(t) \ \delta_z(t)\}^T$

さらに、等価 1 自由度系における応答加速度  ${}_1S_a(t)$  は式 (15) より、次式で与えられる。

$${}_1S_a(t) = \frac{{}_1\beta \{u\}^T \{Q(t)\}}{m \cdot {}_1\beta \cdot u} \quad (35)$$

ここで、 $\{Q(t)\} = \{Q_x(t) \ Q_z(t)\}^T$

従って、時刻歴地震応答解析から得られる  $\{Q(t)\}$  および  $\{\delta(t)\}$  と式 (30) および (31) で求めた刺激関数を用いて、式 (34) および (35) により動的縮約を行うことができる。

#### 3.2 単層 2 軸偏心建築物の動的縮約法

単層 2 軸偏心建築物の動的縮約法では、式 (34) および (35) において y 方向成分 ( $\delta_y$  および  $Q_y$ ) を考慮し、式 (36) ~ (38) により参照モード系を与えることで等価 1 自由度系に縮約できる。

$${}_1\beta \cdot u = \frac{{}_1\delta_{x\max}^2}{{}_1\delta_{x\max}^2 + {}_1\delta_{y\max}^2 + {}_1\delta_{z\max}^2} \quad (36)$$

$${}_1\beta \cdot v = \frac{{}_1\delta_{x\max} \cdot {}_1\delta_{y\max}}{{}_1\delta_{x\max}^2 + {}_1\delta_{y\max}^2 + {}_1\delta_{z\max}^2} \quad (37)$$

$${}_1\beta_1 w = \frac{{}_1\delta_{x\max} \cdot \delta_{z\max}}{{}_1\delta_{x\max}^2 + \delta_{y\max}^2 + \delta_{z\max}^2} \quad (38)$$

#### 4. 等価 1 自由度系における応答特性

##### 4.1 解析概要

2 章および 3 章で示した静的縮約法および動的縮約法を検証するために静的非線形荷重増分解析と時刻歴地震応答解析を行った。

解析モデルの平面図を図-3 に示す。解析モデルは同一平面で剛心位置の異なる 9 タイプであり、偏心のない標準モデル (test1) の各柱断面を変化させることにより偏心モデル (test2~9) を作成した。各解析モデルは桁行および張間方向が共に 6.0m×2 スパンで、高さが 3m の単層建築物とし、重量、重心位置 ( $x_g, y_g$ )、剛心位置 ( $x_c, y_c$ ) および偏心率 ( $R_x, R_y$ ) をそれぞれ表-1 のように設定した。解析モデル名の番号は図-3 の中に示している剛心位置の番号と対応しており、test2~4 が 1 軸偏心モデル、test5~9 が 2 軸偏心モデルとなっている。また、図-4 に test4 および test9 のモード図を示す。各モードは偏心の影響でねじれが生じていることがわかる。なお、1 軸偏心では実際には 3 次モードまでであるが、y 方向のモードは独立しているので除外した。時刻歴地震応答

解析および静的非線形荷重増分解析では共に、梁および柱部材を材端バネモデルによりモデル化し、復元力特性には Takeda モデルを用いた。なお、単層建築物においては軸力変動の影響は小さいと考え、解析では軸力変動は考慮していない。

地震応答解析に用いた入力地震波は、El Centro NS (1940) および JMA-Kobe NS (1995) の 2 波であり、それぞれ最大速度を 25cm/sec, 50cm/sec に基準化した計 4 波とした。なお、地震波入力時間は地震動の主要な 10 秒間とした。また、粘性減衰は瞬間剛性比例型とし、弾性 1 次モードに対して減衰係数を 5% と仮定した。数値積分には Newmark- $\beta$  法 ( $\beta=1/4$ ) を用い、積分時間刻みを 0.0001 とした。

##### 4.2 偏心建築物の地震応答特性

図-5 および図-6 にそれぞれ 1 軸偏心モデル (test2~4) および 2 軸偏心モデル (test7~9) に対する El Centro (50cm/sec) 入力の解析結果より得られた x 方向の層せん断力-層間変形関係 (上段) と等価 1 自由度系における  ${}_1S_a$ - ${}_1S_d$  関係 (下段) を示す。x 方向の層せん断力-層間変形関係において、偏心率  $R_x$  が小さい test2, 3 および 8 では履歴に乱れはないが、偏

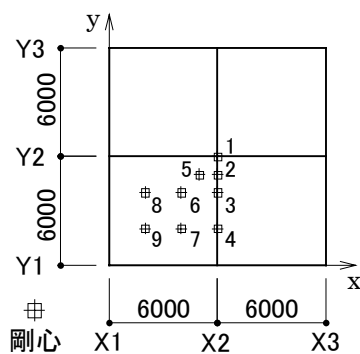


図-3 モデル図

表-1 解析モデルの概要

	モデル	重量(kN)	重心位置		剛心位置		偏心率	
			$x_g$ (cm)	$y_g$ (cm)	$x_c$ (cm)	$y_c$ (cm)	$R_x$	$R_y$
偏心なし	test1	1902	600.0	600.0	600.0	600.0	0	0
	test2	1905	600.0	599.1	600.0	501.4	0.144	0
	test3	1909	600.0	597.8	600.0	400.0	0.307	0
	test4	1926	600.0	592.6	600.0	200.0	0.768	0
2軸偏心	test5	1909	598.9	598.9	500.9	500.9	0.139	0.139
	test6	1919	597.0	597.0	401.0	401.0	0.283	0.283
	test7	1943	595.0	589.7	400.7	200.9	0.711	0.270
	test8	1943	589.7	595.0	200.9	400.7	0.270	0.711
	test9	1990	581.9	581.9	201.6	201.6	0.670	0.670

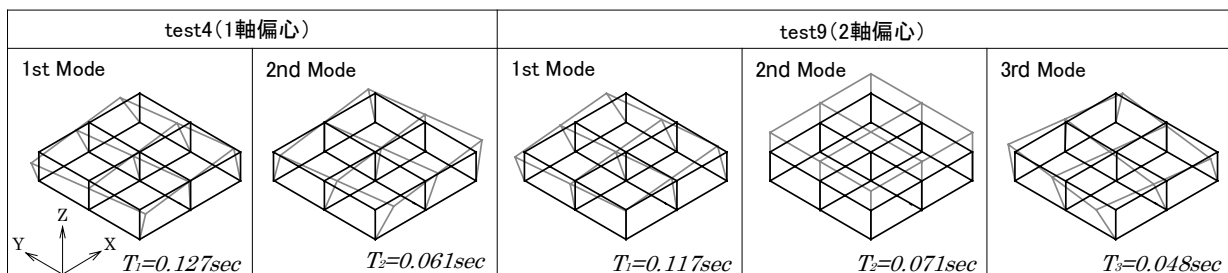


図-4 モード図

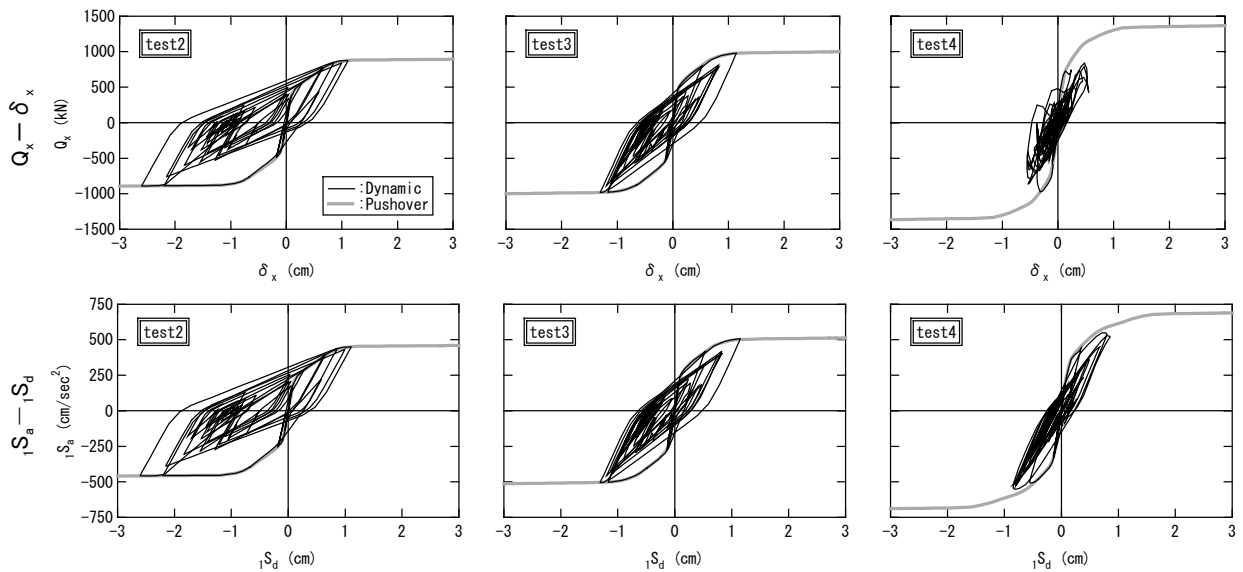


図-5 1軸偏心建築物の多自由度系および縮約系の解析結果

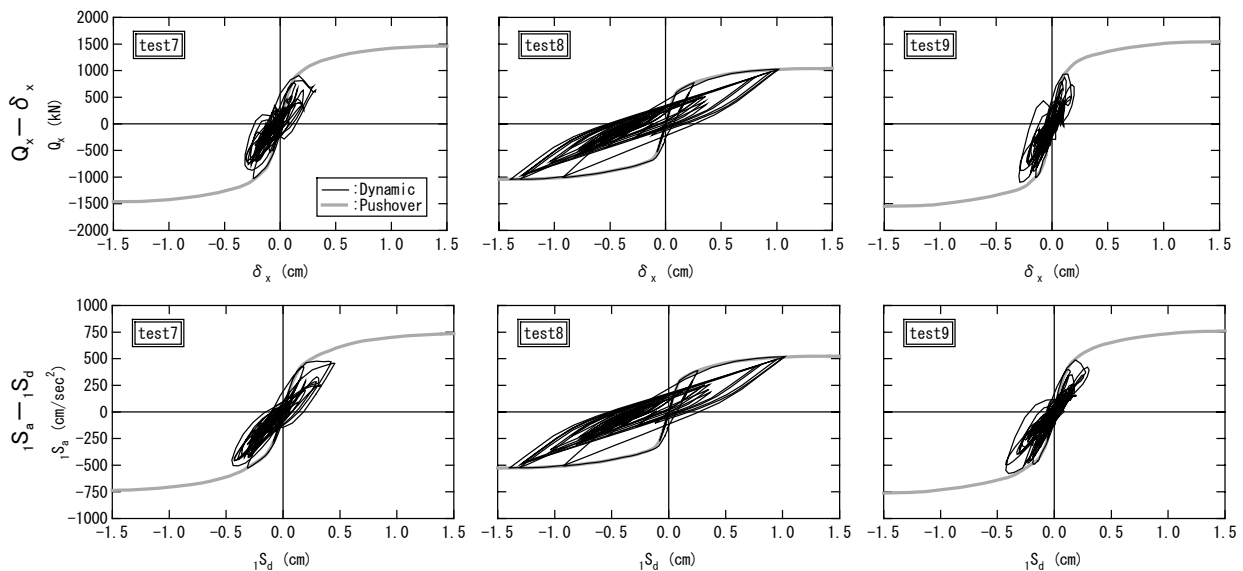


図-6 2軸偏心建築物の多自由度系および縮約系の解析結果

心率  $R_x$  が大きい test4, 7 および 9 では乱れた履歴を示している。また,  $iS_a - iS_d$  関係においては, test2, 3 および 8 は層せん断力-層間変形関係とほぼ同じ履歴を示しているが, test4, 7 および 9 では履歴の形が層せん断力-層間変形関係とは異なる結果となった。

図-7 に test2, 4 および 9 の動的縮約結果 (El Centro (50cm/sec) 入力) における最大応答時 (正側) 以前の x 方向フレームの履歴および骨格曲線を示す。これらは荷重増分解析および地震応答解析の結果をもとにしており, フレームの応答加速度  $fA$  はフレームに生じたせん断力を質量で除すことにより求めている。また, 図

中の○, □および△はそれぞれ動的縮約による等価 1 自由度系の正側の最大応答変形時における Y1, Y2 および Y3 通りのフレームの応答点を表しており, ●, ■および▲はそれぞれ上記最大応答変形に相当する静的縮約による等価 1 自由度系における各フレームの応答値を表している。同図より, 動的解析結果においては, 偏心率  $R_x$  が小さい test2 では等価 1 自由度系の最大応答変形時に各フレームが最大応答に達しているのに対して,  $R_x$  が大きい test4 および 9 では Y1 フレームだけが最大応答点に達していないことが認められる。これは偏心が大きくなることによって, 回転慣性の影響で剛性の小さなフレ

ームの変形が進み、剛性の大きなフレームの変形が逆に戻る現象を生じたためであり、このことが等価 1 自由度系における最大応答時付近の耐力低下を招いた一因と考えられる。

一方、動的解析結果と静的解析結果の比較に着目すると、test2 では各フレームの最大応答点に関する両者の対応は極めて良好である。しかしながら、 $R_x$ の大きな test4 および 9 では動的解析結果が静的解析結果に対して、Y1 フレームで小さく、Y3 フレームで大きくなる傾向が顕著に認められる。これは図-8 に示すように、 $R_x$ の大きな動的縮約系では最大応答時付近において回転角  $\theta$  が静的解析で評価されたものに比して大きくなるためと推察される。したがって、偏心率の大きな建築物に対して限界耐力計算を適用する場合には、静的等価 1 自由度系縮約の際に上記の動的な回転慣性の影響を適切に考慮する必要があると考えられ、今後の研究課題である。

#### 4. まとめ

本論では 1 方向の地震動入力を受ける単層 1 軸偏心建築物に対する等価 1 自由度系の静的縮約法と動的縮約法を提案し、その妥当性を検証するとともに、偏心建築物特有の応答性状の考察を行った。以下に主要結論を列記する。

- (1) 静的縮約法による等価 1 自由度系の代表応答変位  $S_d$  と代表加速度  $S_a$  は、1 軸偏心および 2 軸偏心の建築物に対してそれぞれ式 (8) と (21) および式 (27) と (29) で与えられる。
- (2) 動的縮約法による等価 1 自由度系の代表応答変位  $S_d$  と代表加速度  $S_a$  は式 (34) と (35) で与えられる。
- (3) 偏心が小さな建築物に対しては静的縮約法による等価 1 自由度系の応答値は動的縮約によるものと良好な対応を示すが、偏心が大きくなるにつれ、静的縮約法によるものが動的縮約法によるものに対して、応答加速度を大きく評価する傾向にある。

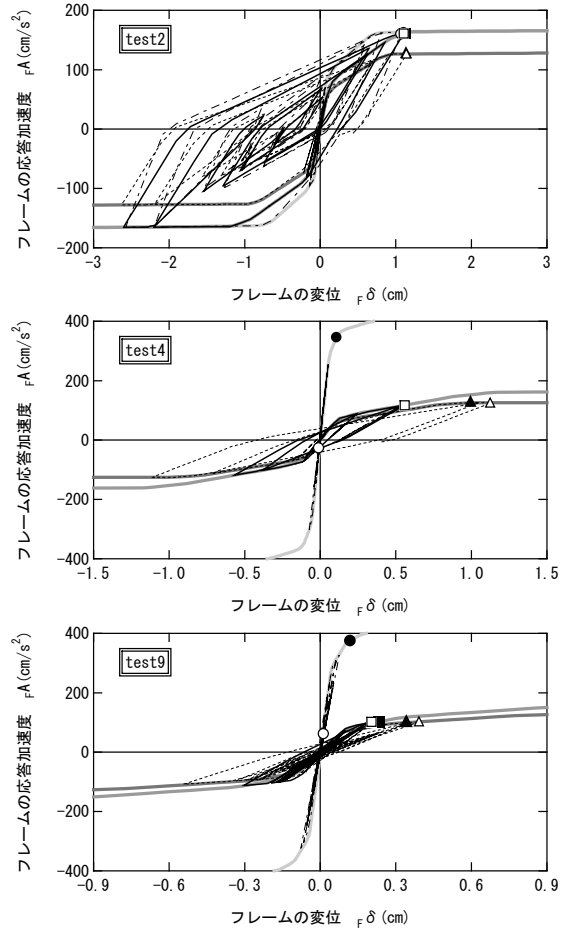


図-7 最大応答時の各フレームの応答

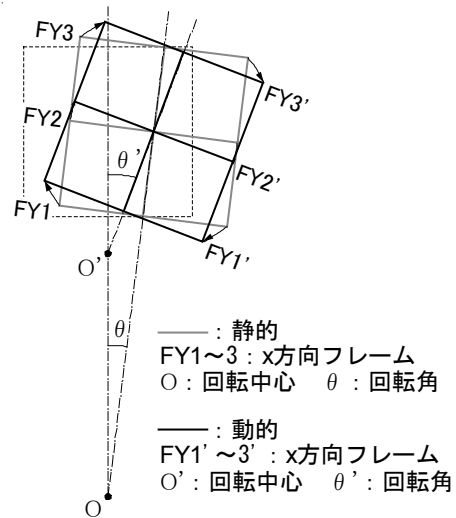


図-8 変形のイメージ図(test4)

#### 参考文献

- 1) 国土交通省建築研究所, 他 3 団体編集: 2001 年版 限界耐力計算法の計算例とその解説, 工学図書株式会社, pp.276, 2001.3
- 2) 倉本洋: 多層建築物における等価 1 自由度系の地震応答特性と高次モード応答の予測, 日本建築学会構造系論文集, 第 580 号, pp.61-68, 2004.6