

# 論文 エネルギー収支に基づくコンクリートの破壊靱性評価法に関する基礎的研究

車谷 麻緒<sup>\*1</sup>・湯本 達也<sup>\*2</sup>・寺田 賢二郎<sup>\*3</sup>・秋山 充良<sup>\*1</sup>

**要旨**：本論文は、構造物のエネルギー収支を評価可能なひび割れ進展解析をコンクリートの破壊靱性試験に応用し、RILEM法における破壊エネルギーの寸法依存性について検討したものである。寸法の異なるモデルの数値実験を通じて、重力の影響がなければRILEM法は妥当な評価法となるが、重力の影響が大きいとエネルギー収支を正しく評価できず、寸法に依存した破壊エネルギーとなることを検証した。また、破壊エネルギーを材料挙動にモデル化しておけば、寸法に依存しない材料としての破壊エネルギーを評価できることを示した。

**キーワード**：エネルギー収支, RILEM法, 破壊エネルギー, 寸法効果, Cohesive crack model

## 1. はじめに

コンクリートの破壊靱性（破壊エネルギー）を測定する方法として、破壊靱性試験と呼ばれる切欠き梁の3点曲げ試験が広く採用されている<sup>1),2)</sup>。RILEM法<sup>1)</sup>は、エネルギーベースの破壊力学を背景に、破壊靱性試験から得られる荷重-変位曲線下の面積に重力による補正項を加えた後、破断面積でこれ除すことにより破壊エネルギーを簡易かつ定量的に評価する方法のひとつである。

RILEM法は、評価の簡便性には優れるものの、実験方法に関する誤差がすべて評価に含まれてしまうので、算定した破壊エネルギーには、試験装置の影響や供試体の寸法依存性の存在が指摘されている<sup>3)</sup>。より高度な引張軟化特性・破壊エネルギーの評価法として、逆解析による方法（同定法）がある。これは、破壊靱性試験の結果から引張軟化曲線の外形を求める方法であり、 $J$ 積分のエネルギー的性質に基づくものや<sup>4)</sup>、仮想ひび割れモデルを応用したものが<sup>5)</sup>。しかし、これらの既往の研究の多くは、試験結果の利用を前提とするトップダウン式（事後評価型）の評価法であり、上で述べたRILEM法の問題点を克服するものではない。

もうひとつの考え方として、破壊エネルギーがそもそも領域内で一定ではない、という研究報告がある。これは、局所的に分布する破壊エネルギーを定義して、破壊エネルギーの寸法依存性を説明するものである<sup>6),7)</sup>。しかし、たとえそれが事実であったとしても、コンクリートの代表的な材料特性としての破壊エネルギーが定まるような、数値実験法・破壊靱性評価法を確立しておく必要がある。

他方、Hillerborg *et al.*<sup>8)</sup>が考案した仮想ひび割れ・結合カモデル（Cohesive crack model）を応用した数値解析手法に関する研究が行われている。Cohesive crack modelをFEMに組み込み、適切なひび割れ進展解析アルゴリズム

を採用すれば、構造内部の変形・破壊現象における力学的なエネルギー収支を考慮することができ、供試体という構造物の「寸法効果」を反映した数値解析を行うことができる。すなわち、エネルギー収支という基本的な力学原理に基づくボトムアップ式の解析・評価が可能となる。

そこで本研究では、構造物のエネルギー収支を評価可能なひび割れ進展解析をコンクリートの破壊靱性試験に応用し、破壊エネルギーの寸法依存性について検討する。まず、本論文で採用する構造物のエネルギー収支を評価可能なひび割れ進展解析手法を示し、RILEM法の概要と寸法依存性について述べる。そして、重力の有無を考慮した、大きさの異なる供試体の数値実験を通じて、RILEM法における破壊エネルギーの寸法依存性を検証し、材料としての破壊エネルギーの評価法について言及する。

## 2. 変形と破壊のエネルギー収支に着目した準脆性材料のひび割れ進展解析手法

### 2.1 Cohesive crack modelの導入

コンクリートの軟化挙動とは、図-1に示すように、ひび割れの生じていない未破壊領域と完全な開口破壊領域との中間に存在する破壊進行領域（Fracture Process Zone; FPZ）において、ひび割れ幅の増大に伴い応力伝達が消失していく現象である。コンクリートの非線形破壊現象には、この軟化挙動が大きくかわることが指摘されている。

Hillerborg *et al.*<sup>8)</sup>が考案したCohesive crack modelは、FPZでの力学挙動をモデル化した代表的なものであり、図-2のようにFPZの全体を単一の仮想ひび割れに置換し、FPZでの応力伝達を仮想ひび割れ面上の結合カ（表面力）で代用するモデルである。この表面力の大きさは、開口変位と表面力の関係を表した引張軟化曲線により定められ、曲線下の面積は破壊エネルギーと定義されている。

\*1 東北大学大学院 工学研究科 土木工学専攻（正会員）

\*2 東京工業大学大学院 理工学研究科 国際開発工学専攻

\*3 東北大学大学院 工学研究科 土木工学専攻

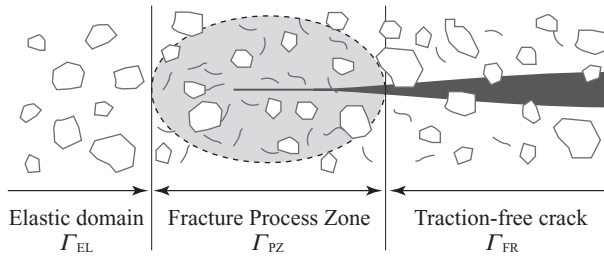


図-1 準脆性材料における破壊進行領域の模式図

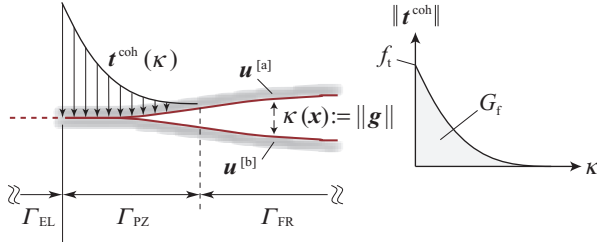


図-2 Cohesive crack model

本研究では、次式で表されるような、破壊エネルギーを材料パラメータとして直接考慮可能で、かつ実験結果と整合性の良い指数関数型の表面力-開口変位関係を引張軟化則として与えることとする<sup>9)</sup>。

$$\|t^{\text{coh}}\| = f_t \exp\left(-\frac{f_t}{G_f} \kappa\right) \quad \text{on } \Gamma_{\text{PZ}} \quad (1)$$

ここで、 $\|t^{\text{coh}}\|$  は FPZ に作用する結合力ベクトルの大きさ、 $f_t$  は FPZ が形成される引張強度、 $\kappa$  は載荷履歴における最大開口変位である。 $G_f$  は本論文で定義する「材料としての破壊エネルギー」であり、RILEM 法のように実験で得られる曲線下の面積から定めるものではない。なお、後述するが、本論文では後者のような、逆解析的に定まる破壊エネルギーを  $G_f$  と表記する。

また、本研究で採用した引張軟化モデルを規定する式 (1) は、次に示すように、曲線下の面積を計算すると破壊エネルギーを再生するので、局所的な準脆性破壊におけるエネルギー的性質を満たしている。

$$\int_0^\infty f_t \exp\left(-\frac{f_t}{G_f} \kappa\right) d\kappa = \left[ f_t \left(-\frac{G_f}{f_t}\right) \exp\left(-\frac{f_t}{G_f} \kappa\right) \right]_0^\infty = -G_f \exp(-\infty) + G_f = G_f \quad (2)$$

引張軟化特性を同定する既往の研究<sup>10)</sup>において、軟化曲線の終局点（最終開口変位）の寸法依存性が指摘されている。本論文では、上記のように指数関数による漸近特性を利用して（材料としての）破壊エネルギーを規定するので、最終開口変位を規定する必要はなく、そのような問題は生じにくい。

Cohesive crack model を破壊面に導入する際、本研究では、図-3 および次式に示すように、Cohesive crack model で規定される結合力をバネの反力で書き換える<sup>11),12)</sup>。

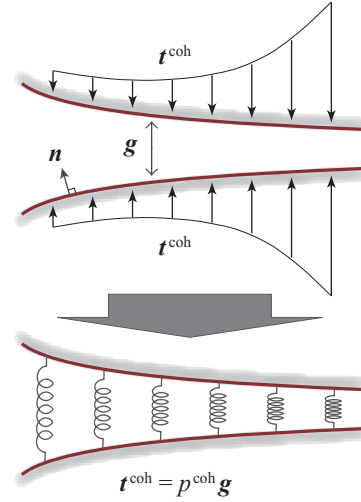


図-3 バネの反力でモデル化した Cohesive crack model

$$t^{\text{coh}} = p^{\text{coh}} g \quad \text{on } \Gamma_{\text{PZ}} \quad (3)$$

ここで、 $g$  は不連続面における相対変位（開口変位）ベクトル、 $p^{\text{coh}}$  は不連続面での相対変位方向の結合（粘着）を表すバネ剛性であり、 $g \approx \mathbf{0}$  の場合には一般的なペナルティ法におけるペナルティ係数と同一視できる。なお、本研究では、式 (1) における最大開口変位の履歴変数  $\kappa$  は  $\|g\|$  で定めることとする。

## 2.2 弱形式のつり合い方程式

本研究の主な解析対象は、切欠き梁の3点曲げ試験のようなひび割れ進展経路が既知の問題であるので、不連続変形のモデル化には、簡易なひび割れ進展解析法として知られる、ひび割れ発生位置にインターフェイス要素を用いる離散ひび割れモデルを適用する。そして、インターフェイス要素にペナルティ法を適用することにすれば、ひび割れ発生時点でペナルティ係数をバネ剛性とみなせるので、バネで近似した Cohesive crack model の式 (3) をそのまま利用することができる。すなわち、破壊進行領域が形成する前の弾性解析では、未破壊の弾性領域  $\Gamma_{\text{EL}}$  をペナルティ法によるバネ剛性  $\bar{p}$  で近似し、破壊判定後は破壊進行領域  $\Gamma_{\text{PZ}}$  を Cohesive crack model に基づくバネ剛性  $p^{\text{coh}}$  で近似することになる<sup>11),12)</sup>。

本研究では、ひび割れを含む準脆性材料の準静的なつり合い問題を対象とする。このような問題に対して、上で述べたペナルティ法と Cohesive crack model を考慮した弱形式のつり合い方程式は次式で表される<sup>11),12)</sup>。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla \delta u : \sigma \, d\Omega \\ & + \underbrace{\int_{\Gamma_{\text{EL}}} \bar{p} \delta g \cdot g \, d\Gamma}_{\text{Penalty term}} + \underbrace{\int_{\Gamma_{\text{PZ}}} p^{\text{coh}} \delta g \cdot g \, d\Gamma}_{\text{Cohesive crack term}} \\ & = \int_{\Omega} \delta u \cdot \bar{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_f} \delta u \cdot \bar{t} \, d\Gamma \quad \forall \delta u \quad (\forall \delta g) \quad (4) \end{aligned}$$

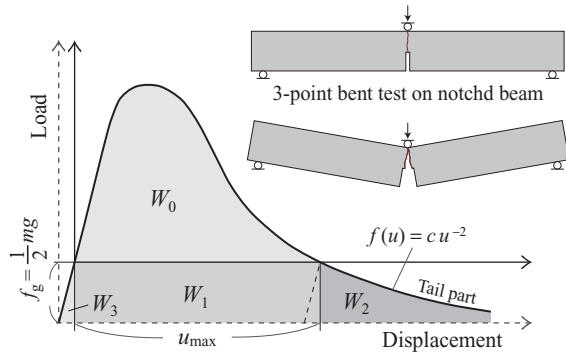


図-4 RILEM 法におけるエネルギーの概要

ここで、 $\sigma$  は Cauchy 応力テンソル、 $\Omega$  は物体領域、 $\Gamma_i$  は Neumann 境界、 $\bar{b}$  と  $\bar{t}$  はそれぞれデータとして与えられる物体力ベクトルと分布外力ベクトルである。 $\bar{p}$  はペナルティ係数であり、構成材料のヤング率の  $10^4$  倍程度の大きな実数を設定する。

弱形式 (4) において、右辺は外力、左辺第 1 項は内力、左辺第 2 項と第 3 項は破壊（ひび割れ形成）に関連する仕事（エネルギー）を表している。なお、本研究では、材料の挙動は線形弾性体に従うものとする。

### 2.3 破壊の判定方法<sup>11),12)</sup>

破壊（離散ひび割れ）の発生については、要素境界での表面力を用いて評価する。式 (3) と同様に、要素境界での表面力  $\lambda$  は、バネ係数  $\bar{p}$  の反力として次式により計算する。

$$\lambda = \bar{p} g \quad \text{on } \Gamma_{EL} \quad (5)$$

本研究では、この表面力を用いて、破壊の発生基準を次のように定めることにする。

$$\lambda \cdot n > 0 \quad \text{and} \quad \|\lambda\| - f_t = 0 \quad (6)$$

ここで、 $n$  は  $\Gamma_{EL}$  における外向き単位法線ベクトルである。

本論文において、破壊の判定は  $\Gamma_{EL}$  が  $\Gamma_{PZ}$  に移行することを意味する（図-1 を参照）。すなわち、本論文における  $f_t$  の定義どおり、式 (6) が満たされれば、破壊進行領域が形成され、式 (1) の Cohesive crack model に従って引張軟化が開始することになる。

### 2.4 エネルギー収支を考慮したひび割れ進展解析

Hillerborg *et al.*<sup>8)</sup> が考案した Cohesive crack model は、構造内部における変形と破壊のエネルギー収支に着目した破壊力学モデルである。これは、ひび割れ（破壊）の形成・進展によって消散するエネルギーの量は、付与された外力エネルギーと構造内部のひずみエネルギーとの収支によって決まることを意味する。したがって、ひび割れ進展領域のみ、あるいは仮想ひび割れモデル（Cohesive crack model）のみの解析では不十分であり、外力・破壊・内力によるエネルギーがすべて見積られるよう、構造物の境

界値問題として扱わなければならない。

構造物のエネルギー収支を評価可能な数値解析を行うには、外力・破壊・内力に関する仕事（エネルギー）の式を扱えばよい。つまり、Cohesive crack model を考慮した弱形式 (4) を一般的な固体の有限要素で離散化し、その離散化方程式を陰的なアルゴリズムで解けばよく<sup>11),12)</sup>、それによって得られた結果は、内力・破壊・外力に関するエネルギー収支を考慮したものとなる。

## 3. RILEM 法における寸法依存性の数値的検討

### 3.1 RILEM 法の概要<sup>1),13),14)</sup>

RILEM 法は、図-4 に示すような、切欠き梁の 3 点曲げ試験から得られる荷重-変位関係の面積に重力による補正項を加えた後に、これを破断面積（リガメント面積）で除すことにより見かけの破壊エネルギーを求める方法である。本論文では、このようにして求められる破壊エネルギーを  $G_F$  と表記し、式 (1) の  $G_f$  とは区別することとする。

RILEM 法では、まず、荷重-変位関係の面積を同図のように  $W_0 \sim W_3$  に分ける。 $W_0$  は外力による仕事であり、実際の試験結果に相当する。 $W_1 \sim W_3$  は、供試体の自重（重力）による仕事である。また、 $u_{max}$  は（試験終了時の）最大変位、 $f_g$  は自重で、重力を分布荷重とみなした単純梁の構造力学計算から  $1/2 mg$ （ $m$  は質量、 $g$  は重力加速度）と近似される。

次に、 $W_0 \sim W_3$  の算出法について説明する。 $W_0$  は試験結果の荷重-変位関係の面積であり、 $W_1$  は次式となる。

$$W_1 = f_g u_{max} = \frac{1}{2} mg u_{max} \quad (7)$$

$W_2$  については、まずテール部分の曲線を、 $c$  を定数として  $f(u) = cu^{-2}$  と仮定する。 $f(u_{max}) = 1/2 mg$  より、 $c = 1/2 mg u_{max}^2$  となるので、 $W_2$  は次のように求められる。

$$\begin{aligned} W_2 &= \int_{u_{max}}^{\infty} f(u) du = \int_{u_{max}}^{\infty} \frac{1}{2} mg u_{max}^2 u^{-2} du \\ &= \frac{1}{2} mg u_{max} = W_1 \end{aligned} \quad (8)$$

そして、 $W_3 \approx 0$  を仮定することにより、RILEM 法における破壊エネルギー  $G_F^{RLM}$  は次式で与えられる。

$$G_F^{RLM} = \frac{W_0 + W_1 + W_2 + W_3}{A_{lig}} = \frac{W_0 + mg u_{max}}{A_{lig}} \quad (9)$$

ここで、 $A_{lig}$  はリガメント面積（破断面積）である。なお、 $W_1$  と  $W_2$  の境界を図-4 の点線とし、単純に左右の面積が等しいとする考え方もある<sup>15)</sup>。

式 (9) で評価される  $G_F^{RLM}$  には、供試体寸法に対する依存性が指摘されており<sup>3)</sup>、 $G_F^{RLM}$  の材料パラメータとしての是非が議論されている。RILEM 法における寸法依存性の原因として、供試体破断時の不安定性<sup>16)</sup>、重力項の修正<sup>13),14)</sup>、局所的な破壊エネルギーの存在<sup>6),7)</sup>などが研究されてはいるが、その支配要因はまだ特定されていない。

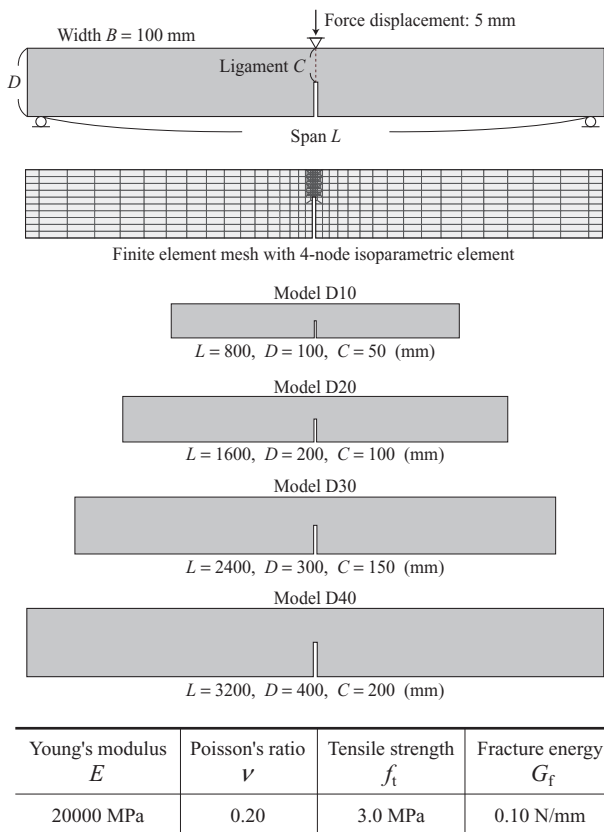


図-5 大きさの異なる切欠き梁の3点曲げ試験

以下では、構造物のエネルギー収支を評価可能なひび割れ進展解析重力の有無を考慮した、大きさの異なる供試体<sup>13),14)</sup>の数值実験を行い、RILEM法が理論的背景としているエネルギー収支の妥当性と破壊エネルギーの寸法依存性を検証する。

### 3.2 重力を考慮しない数值実験 ( $W_0$ について)

はじめに、重力を考慮しない数值実験を行い、破壊靱性試験におけるエネルギー的性質について検討・考察する。解析対象は、図-5に示すような、RILEM法<sup>1)</sup>に準じた切欠き梁の3点曲げ問題とする。梁の幅  $B$  を一定<sup>16)</sup>とし、スパン  $L$ ・高さ  $D$ ・リガメント長さ  $C$  を相似的に変化させた4つのモデルを対象とする。有限要素メッシュはすべて同じであり、単純に大きさのみが異なるモデル<sup>13),14)</sup>である。使用する有限要素は、双一次四辺形要素であり、同図に示す材料パラメータを設定し、平面応力条件下の変位制御によるひび割れ進展解析を行う。

数值解析結果のグラフを図-6に示す。図中(a)は載荷点における荷重-変位関係を表しており、(b)は荷重-変位関係における寸法の影響を除くためにスパンとリガメント面積で正規化したものである。図-6(b)において、小さいモデルほど高強度・高靱性であるといった寸法効果が再現されている。与えている材料パラメータは4モデルともに共通であり、本手法はメッシュ分割に依存しないので

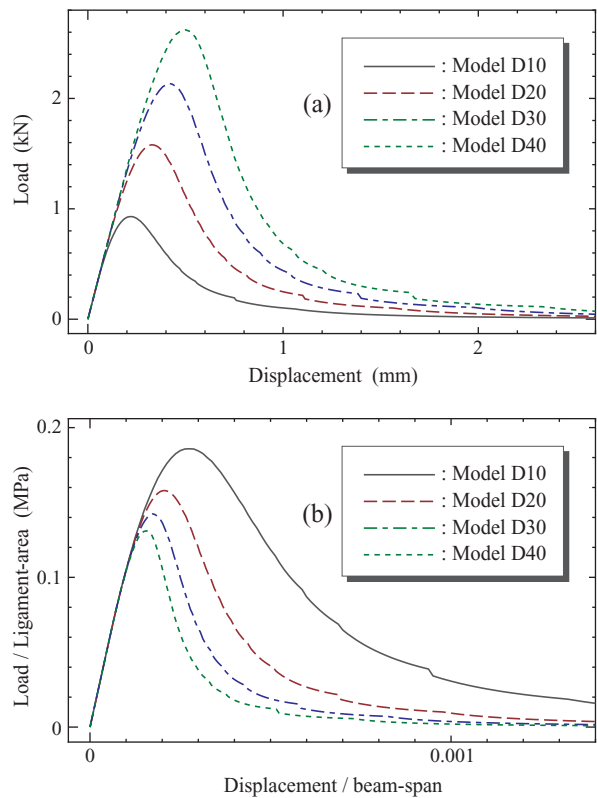


図-6 大きさの異なる供試体モデルの応答；(a) 荷重-変位関係、(b) 正規化した荷重-変位関係

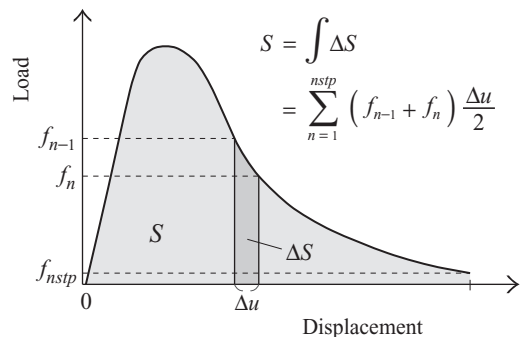


図-7 台形公式による積分と消散エネルギー

<sup>11)</sup>、モデル寸法の違いのみを用いて、寸法効果を含む構造物の挙動(寸法依存性)を再現したことになる。なお、ここでも寸法効果は、準脆性材料の破壊力学における寸法効果であり、供試体実験で考察されるような変形の不均一性や境界条件の影響による寸法効果ではない。

図-6(a)の曲線下の面積が外力によって消散されたエネルギー、すなわちRILEM法における  $W_0$  に相当する。以下では、図-7に示す台形積分を利用して、エネルギー収支と破壊エネルギーについて検討する。図-6(a)の荷重-変位関係を対象に、台形積分で計算した消散エネルギーをリガメント面積で除すことにより、各モデルの見かけの破

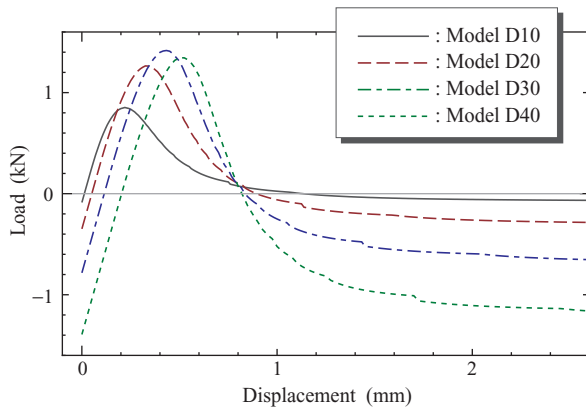


図-8 自重による影響を考慮した荷重-変位関係

壊エネルギーは次のように評価される。

$$G_F^{D10} = \frac{4.9681 \cdots \times 10^2}{50 \times 100} = 0.09936 \cdots \text{ N/mm}$$

$$G_F^{D20} = \frac{9.9965 \cdots \times 10^2}{100 \times 100} = 0.09996 \cdots \text{ N/mm}$$

$$G_F^{D30} = \frac{1.5078 \cdots \times 10^3}{150 \times 100} = 0.10052 \cdots \text{ N/mm}$$

$$G_F^{D40} = \frac{2.0203 \cdots \times 10^3}{200 \times 100} = 0.10102 \cdots \text{ N/mm}$$

各モデルは、見かけの応答として寸法効果を示していたが、解析結果の消散エネルギーから逆解析的に破壊エネルギー  $G_F$  を求めると、各モデルともに材料パラメータである破壊エネルギー  $G_F$  を精度良く再現している。すなわち、ここでの（本論文で採用した）数値実験は、寸法に依存した構造物の見かけの応答を再現しつつも、寸法に依存しない材料としての破壊エネルギーを評価可能であること表しており、見方によっては、実験装置や供試体寸法による影響を受けない、理想的な破壊靱性試験を模擬したことと等価である。そして、その数値実験結果から、コンクリートの準脆性破壊におけるエネルギーの性質を利用した RILEM 法は、破壊力学的あるいは固体力学的に妥当であることが分かる。

### 3.3 重力を考慮した数値実験 ( $W_0 \sim W_3$ について)

次に、同様のモデルに対して重力を考慮した数値実験を行い、破壊靱性試験におけるエネルギー的性質について検討・考察する。数値実験における自重の扱いに関しては、コンクリートの密度を  $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$  と仮定し、弱形式 (4) における重力項を考慮するだけである。前節と同様のメッシュ・材料パラメータを設定し、平面応力条件下の変位制御によるひび割れ進展解析を行う。

数値実験結果の荷重-変位関係を図-8 に示す。供試体実験においては、自重の影響を取り除くことは簡単ではなく、重力による仕事を評価可能な図-4 と同形式の荷重-変位関係を得るのは通常不可能である。これに対して、図-8 に示されるように、数値実験では変位制御による荷重点で

表-1 各種のエネルギーと破壊エネルギー

	D10	D20	D30	D40
$W_0$	3.504E+02	5.283E+02	5.702E+02	4.944E+02
$W_1$	9.753E+01	2.939E+02	5.644E+02	8.583E+02
$W_2$	9.427E+01	3.530E+02	7.418E+02	1.257E+03
$W_3$	5.535E-01	8.856E+00	4.483E+01	1.419E+02
$G_F^N$	0.1085	0.1184	0.1281	0.1376

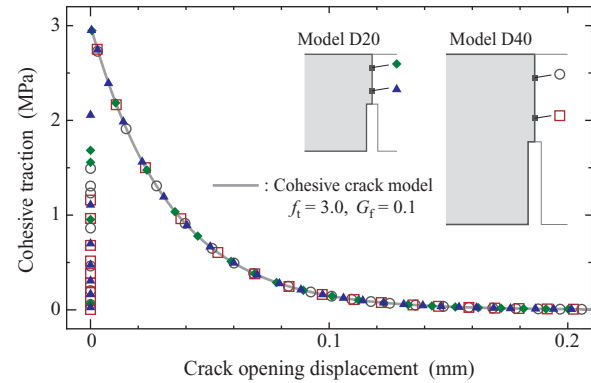


図-9 リガメント部（破壊面）にける局所的な応答

の反力が求まるので、図-4 と同形式の荷重-変位関係が自動的に得られることとなる。なお、図-4 における重力荷重  $f_g$  は、数値実験では有限要素解析により定めているが、各値は RILEM 法で規定している  $1/2mg$  にほぼ等しいことを確かめている。

前節と同様に、台形積分を利用して、準脆性破壊におけるエネルギー収支と破壊エネルギーについて検討する。図-4 で与えた  $W_0 \sim W_3$  に対する数値実験結果をまとめたものを表-1 に示す。表中における  $G_F^N$  は数値実験結果を基に  $W_0 \sim W_3$  を用いて定めた見かけの破壊エネルギーである。この表を見て分かるように、前節の検討とは異なり、供試体の大きさが増すほど重力による影響が顕著となり、寸法に依存した破壊エネルギーが見積もられている。自重を考慮しない前節の検討では、荷重点のみに外力が作用するので、外力エネルギーと破壊に伴う消散エネルギーの収支が荷重点での荷重-変位関係で直接的に表されていた。しかし、重力が作用する場合、特に大きなモデルにおいては、外力は荷重点に作用するのに対して、重力の作用はモデル全体に及ぶので、荷重点での荷重-変位関係では適切なエネルギーを見積もれないことになる。このことから、RILEM 法における破壊エネルギーの評価式は、重力の影響について厳密ではなく、一種の近似に過ぎないことが分かる。

RILEM 法では、 $W_2 = W_1$  と規定していたが<sup>13),14)</sup>、供

試体のサイズが D20 以上となると  $W_2$  の方が大きくなり、 $W_2 = W_1$  の仮定が成り立たなくなっていくことが見て取れる。このことは、荷重-変位関係のテール部分や自重による補正項が、RILEM 法における破壊エネルギーの寸法依存性の一因になり得ることを意味している。

図-9 は、モデル D20 と D40 のリガメント部（破壊面）における開口変位と結合力の関係を示している。この図に示されるように、破壊面における局所的な応答、別の言い方をすれば材料としての応答は、破壊力学モデルとして導入した Cohesive crack model と材料パラメータとして設定した破壊エネルギー  $G_f = 0.1 \text{ N/mm}$  を適切に再現している。すなわち、構造物の見かけの応答である荷重-変位関係から定まる  $G_F$  は寸法に依存するが、局所的な応答として導入した材料としての破壊エネルギー  $G_f$  は寸法に依存しない。つまり、荷重-変位関係のプロファイルを試験結果と照合することにより、材料としての破壊エネルギー  $G_f$  を同定することが可能となる。

#### 4. おわりに

破壊エネルギーの利用は、コンクリートの破壊靭性を表す指標として有用である。しかし、既往の研究では、評価法の寸法依存性や破壊エネルギー自体の寸法依存性に関する議論が混在しているのが現状で、代表的な材料特性としての破壊エネルギーを定めるための、数値実験法・破壊靭性評価法は確立されていない。

本論文では、RIEM 法が理論的背景としている準脆性材料のエネルギー的性質に着目し、構造物のエネルギー収支を評価可能なひび割れ進展解析により、RILEM 法における破壊エネルギーの寸法依存性について検討した。そして、寸法の異なる供試体モデルの数値実験を通じて、重力の影響がなければ RILEM 法は妥当な評価法となるが、重力の影響が大きいと、載荷点での荷重-変位関係ではエネルギー収支を正しく評価できず、寸法に依存した破壊エネルギーを与え得ることを検証した。また、本手法のように、破壊エネルギー  $G_f$  を局所的な応答にモデル化しておけば、構造物の見かけの破壊エネルギー  $G_F$  が寸法に依存したとしても、寸法に依存しない材料としての破壊エネルギーを評価できることを示した。

#### 参考文献

- 1) RILEM Draft Recommendation (50-FMC): Determination of the fracture energy of mortar and concrete by means of three-point bend tests on notched beams, *Mater. Struct.*, Vol.18, pp.285-290, 1985.
- 2) 中村成春, 橘高義典, 三橋博三, 内田裕市: コンクリートの引張軟化特性の標準試験方法に関する基礎的

- 検討, コンクリート工学論文集, Vol.10, pp.151-164, 1999.
- 3) Hillerborg, A.: Results of three comparative test series for determining the fracture energy  $G_F$  of concrete, *Mater. Struct.*, Vol.18, pp.407-413, 1985.
- 4) 内田裕市, 六郷恵哲, 小柳 治: 曲げ試験に基づく引張軟化曲線の推定と計測, 土木学会論文集, No.426/V-14, pp.203-212, 1991.
- 5) 橘高義典, 上村克郎, 中村成春: コンクリートの引張軟化曲線の多直線近似解析, 日本建築学会構造系論文報告集, Vol.453, pp.15-25, 1993.
- 6) Hu, X.-Z. and Wittmann, F.H.: Fracture energy and fracture process zone, *Mater. Struct.*, Vol.25, pp.319-329, 1992.
- 7) Duan, K., Hu, X. and Wittmann, F.H.: Size effect on specific fracture energy of concrete, *Engng. Fract. Mech.*, Vol.74, pp.87-96, 2007.
- 8) Hillerborg, A., Modéer, M. and Petersson, P.-E.: Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements, *Cem. Concr. Res.*, Vol.6, pp.773-782, 1976.
- 9) Wells, G.N. and Sluys, L.J.: A new method for modelling cohesive cracks using finite elements, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.50, pp.2667-2682, 2001.
- 10) Wittmann, F.H., Mihashi, H. and Nomura, N.: Size effect on fracture energy of concrete, *Engng. Fract. Mech.*, Vol.35, pp.107-115, 1990.
- 11) 車谷麻緒, 寺田 賢二郎: Cohesive crack モデルに対する陽的近似アルゴリズムの提案とその性能評価, 土木学会論文集 A, Vol.64, No.3, pp.627-638, 2008.
- 12) 湯本達也, 車谷麻緒, 山田真幸, 寺田 賢二郎, 京谷孝史: 結合力クラックモデルを用いた準脆性材料の破壊エネルギー評価法の提案, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.11, pp.351-359, 2008.
- 13) Mindess, S.: The effect of specimen size on the fracture energy of concrete, *Cem. Concr. Res.*, Vol.14, pp.431-436, 1984.
- 14) Jueshi, Q. and Hui, L.: Size effect on fracture energy of concrete determined by three-point bending, *Cem. Concr. Res.*, Vol.27, pp.1031-1036, 1997.
- 15) Hillerborg, A.: The theoretical basis of a method to determine the fracture energy  $G_F$  of concrete, *Mater. Struct.*, Vol.18, pp.291-296, 1985.
- 16) Elices, M., Guinea, V. and Planas, J.: Measurement of the fracture energy using three-point bend tests: Part 3 - Influence of cutting the  $P-\delta$  tail, *Mater. Struct.*, Vol.25, pp.327-334, 1992.