論文　不規則振動論に基づく RC 構造の簡易な非線形地震応答推定手法

白井　和貴[*1]・五十子　幸樹[*2]・井上　範夫[*3]

要旨：鉄筋コンクリート構造の簡易な非線形地震応答評価法の提案を目的とし，不規則振動論に基づく最大変位推定手法について検討した。等価線形複素剛性モデルの伝達関数を等価周期の低減係数を導入して補正し，応答変位の 2 乗平均平方根とピークファクターの各評価値の積により最大応答を推定する簡易なフローを提示した。提示フローを用いて応答推定を行い，非線形時刻歴解析との比較により推定手法の妥当性を検証した。

キーワード：等価線形化，複素剛性，伝達関数，2 乗平均平方根，ピークファクター，継続時間

1. はじめに

本論の目的は，強震動を受ける鉄筋コンクリート（RC）構造の簡易な非線形応答評価法を提案することである。本論では，不規則振動論（ランダム振動論）の準用により周波数領域で最大応答変位を推定する手法について述べる。

RC 構造の非線形地震応答を求める方法として，第一に非線形時刻歴解析が挙げられる。しかし，得られる応答値は個々の入力地震動に対する特定の解であり，一般性がどの程度あるかの判断が難しい点が課題といえる。

一方，より簡便な応答推定手法として，応答スペクトルを用いる等価線形化法が挙げられる。これまでに多くの研究[例えば 1)~3)]が行われ，限界耐力計算法として耐震設計にも使用されている。しかし，ダンパーを有する RC 制振構造の最適な応答制御設計をするような場合には必ずしも適しておらず（なぜならば，応答スペクトルには地震動とシステムの両特性が混在するため，両者を分けて別々に検討することが難しいからである），その点が課題である。

これらに対して，本論で扱う不規則振動論を用いれば，上記の課題を解決できると考えられる。不規則振動論については，過去に多くの研究[例えば 4)~7)]が行われ，履歴系の非線形応答の研究[例えば 8)~9)]も行われている。しかし，RC 構造を対象とする簡易な応答評価手法，特に応答推定フローを分かりやすく提示した例は少ない。

そこで本論では，冒頭で述べた目的に対して，ダンパーが無い非制振 RC 一質点系を対象とし，2 章で不規則振動論に基づく簡易な応答推定フローを提示し，3 章で提案手法の妥当性検証を行う。

本論の推定手法は，以下の特長を有する。

1) より一般性が高い解が得られる

不規則振動論に基づいて応答の確率論的な期待値が得られるため，非線形時刻歴解析と比べて，より一般性が高い推定値が求まる。

2) 地震動・構造物・確率論的振幅に分解し検討できる

地震動の特性（パワースペクトル密度・継続時間），構造物の特性（システムの伝達関数），確率論的な応答振幅特性（ピークファクター），の各因子に分解して検討できる。このため，これらの因子ごとに評価精度について議論することが可能である。

3) 地震動の継続時間を陽な形で考慮できる

ピークファクターの評価式中に地動継続時間をパラメータとして含むため，継続時間の長短の違いによる影響を応答推定に反映可能である。

4) 伝達関数に基づく制振設計手法と連続性が高い

本論の推定手法は，ダンパーを有する RC 制振構造を対象とする場合にも拡張可能である。本論の対象外ではあるが，このような制振システムの応答制御問題，特に伝達関数に着目して最適ダンパー設計を行う場合に，本推定手法は良く適している。

2. 応答推定手法の提示

本章では，不規則振動論に基づく非線形応答推定手法を簡易なフローの形で提示し，その説明を行う。なお，本論では RC 構造の降伏後に対象を絞る。

2.1 応答推定フロー

提案する応答推定フローを**図－1** に示す。

フロー(1)では，入力地震動を設定する（2.2 で後述）。周波数特性として地動加速度のパワースペクトル密度 $G_I(\omega)$を，位相特性として地動の継続時間 t_d を与える。このように，入力地震動の周波数特性と位相特性を個別に設定・考慮できることが利点といえる。

フロー(2)では，RC 構造の諸元を設定する（2.3 で後述）。

フロー(3)では，最大応答塑性率 μ を仮定する。この

*1 北海道大学大学院工学研究院　准教授・博士（工学）　(正会員)　(投稿時（株）大林組技術研究所)
*2 東北大学大学院工学研究科　准教授・博士（工学）
*3 東北大学大学院工学研究科　教授・工博　(正会員)

とき，μ の初期値は十分小さい値からフローを開始する。

フロー(4)では，等価線形系の伝達関数$|H_\mu(\omega)|$を求める（2.4 で後述）。フロー(3)で仮定した μ に応じて$|H_\mu(\omega)|$が計算できる。このとき，非線形応答を考慮するため等価周期の低減係数 η を用いて μ の補正を行う。

フロー(5)では，応答変位の 2 乗平均平方根 σ を求める（2.5 で後述）。応答変位のパワースペクトル密度は，$|H_\mu(\omega)|$の 2 乗と地動パワースペクトル密度 $G_I(\omega)$の周波数領域における積として得られる。この応答変位のパワースペクトル密度の面積が 2 乗平均 σ^2 となり，その平方根が σ となる。

フロー(6)では，ピークファクターP を求める（2.6 で後述）。本論では，地動継続時間 t_d および平均的な等価周期 T_{eq}に応じて P を計算する。

フロー(7)では，推定最大応答変位$|x|_{max}$ を求める。P と σ の積として$|x|_{max}$を計算する。

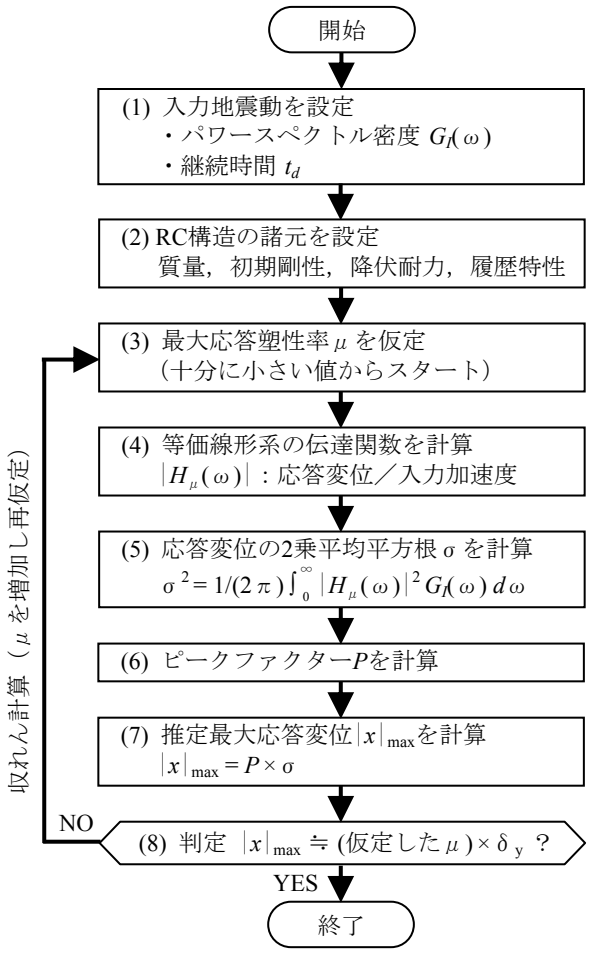
フロー(8)では，フロー(7)で得られた推定変位$|x|_{max}$が，フロー(3)で仮定した μ に降伏変位 δ_y を乗じた変位（$=\mu\times\delta_y$）と合致するか否かを判定する。両者が合致しない場合は，基本的に μ を増加し再仮定してフロー(3)に戻り，フロー(8)の判定結果が収れんするまで計算を繰り返す。$|x|_{max}$が$\mu\times\delta_y$と合致すれば，そのときの μ および$|x|_{max}$を推定応答値とする。

2.2 入力地震動の設定

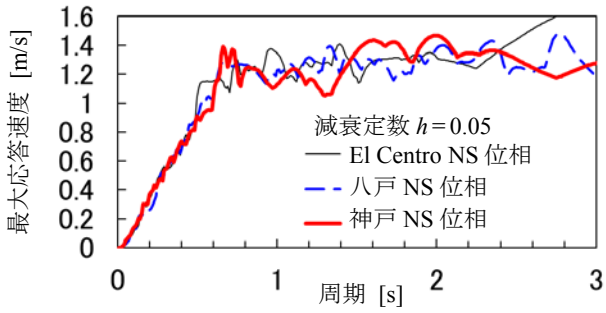
本節では，入力地震動の設定について述べる。入力地震動として，告示スペクトル適合波（極めて稀に発生する地震動，解放工学的基盤）の入力倍率を 1.5 倍した波形を使用する。位相特性は，1940 Imperial Valley 地震の El Centro NS，1968 十勝沖地震の八戸港湾 NS ，1995 兵庫県南部地震の JMA 神戸 NS の計 3 波とする。速度応答スペクトルを**図－2** に示す。

不規則振動論に基づいて応答推定を行うために，地震動の周波数特性として地動加速度のパワースペクトル密度 $G_I(\omega)$を与える。ここでは，スペクトルの山谷（ギザギザ）の影響を緩和しスペクトル形状をスムーズにするため，バンド全幅 0.5 Hz の Parzen ウインドウにより原波のパワースペクトル密度を周波数領域で移動平均処理した平滑化スペクトルを $G_I(\omega)$として用いる。各入力地震動の $G_I(\omega)$を，横軸を周期で表し**図－3** に示す。

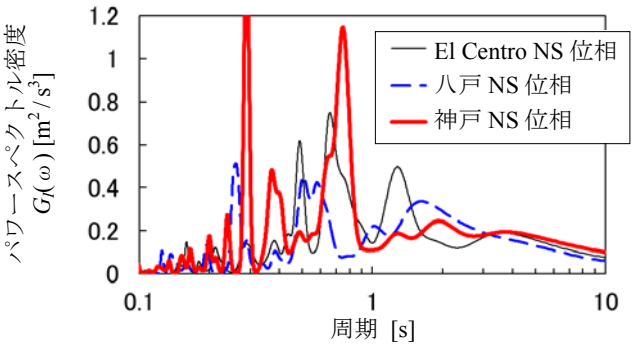
地震動の位相特性に関する重要なパラメータとして，地動継続時間 t_d を与える。本論では t_d の設定方法として，地動加速度の 2 乗累積値が地震終了時の総累積値に対して 1～99 %となる区間を採用する。この設定方法は定義が簡潔であり，地震動のほぼ全区間を継続時間に含むために主要動に節があるような場合でも問題が生じない利点がある。各入力地震動の時刻歴加速度と継続時間 t_d を**図－4** に示す。



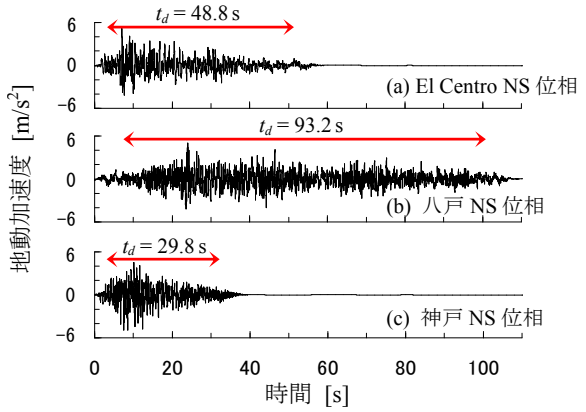
図－1　応答推定フロー



図－2　入力地震動の速度応答スペクトル



図－3　地動加速度のパワースペクトル密度（平滑化）



図－4　入力地震動の時刻歴加速度と継続時間 t_d

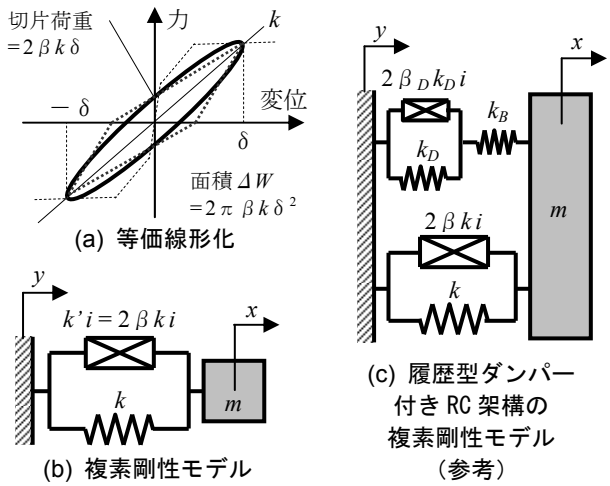
ただし，本論の地動継続時間 t_d の設定方法では，非定常な地震動区間を扱うことになるため，定常ランダム振動論が厳密には成立しなくなる。従って t_d の設定方法については更なる検討の余地があり，今後の課題としたい。例えば，地震動のマグニチュードから主要動の継続時間（ほぼ定常過程とみなせる有効継続時間）を計算して用いることで線形系の応答推定精度が向上する知見[7]があり，このような方法が参考になると考えられる。

2.3 RC 構造の設定

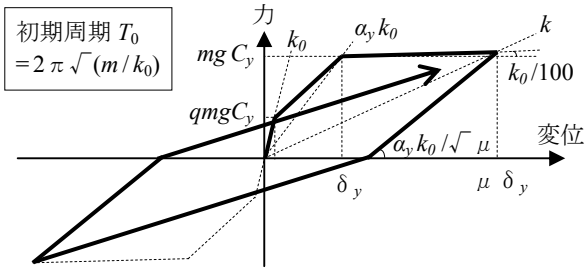
本節では，RC 構造の設定について述べる。RC 構造の非線形復元力特性を，**図－5(a)**に示すように等価な剛性と減衰を有する等価線形系に置き換える。一質点系を対象とし，変位依存型の履歴減衰性状を等価線形系で簡潔に表現するために**図－5(b)**に示す複素剛性モデルを用いる。ここで，δ は定常振動時のピーク変位，x は応答変位，y は地動変位，m は質点質量，k と k' は複素剛性の実部と虚部，i は虚数単位，β は複素減衰定数である。

なお本論の検討は，ダンパーを有する RC 構造の制振設計手法に関する研究の一環として行っている。**図－5(c)**は履歴型ダンパー付き RC 架構の複素剛性モデル[10]であり，本論の対象外であるが参考のために示す。ここで，k_B は支持部材剛性，k_D はダンパー剛性，β_D はダンパーの複素減衰定数である。

RC 構造の非線形履歴特性として，**図－6** に示す Degrading Tri-linear 型モデルを用いる。ここで，C_y は降伏せん断力係数，g は重力加速度，k_0 は初期剛性，α_y は降伏時剛性低下率，k は等価剛性，q はひび割れ強度の降伏強度に対する比，δ_y は降伏変位，μ は塑性率である。なお C_y については，非線形時刻歴応答解析（解析条件は後述する 3.2 と同じ）を事前に行い $\mu = 2$ および 3 となる所要耐力スペクトル[例えば 11]を計算し，その結果を用いる。具体的には，各入力波について，初期周期 T_0 を変化させ，最大応答変位が所定の塑性率（$\mu = 2$，3）となる C_y を収れん計算により求める。得られた C_y を，3 章の応答推定および非線形時刻歴解析において設定する。



図－5　RC 構造の検討モデル（等価線形複素剛性モデル）



図－6　復元力特性

2.4 等価線形系の伝達関数 $|H_\mu(\omega)|$ の設定

本節では，RC 構造の等価線形系伝達関数の設定について述べる。**図－5(b)**の複素剛性モデルが調和地動加速度 $\ddot{y}$ を受けるとき，振動方程式は式(1)で表される（ω>0，ω は外力の円振動数）。

$$m\ddot{x} + (1+2\beta i)kx = -m\ddot{y} \tag{1}$$

また $\ddot{x} = -\omega^2 x$，$\dot{x} = \omega i x$ と置くことで式(2)が得られる。

$$\left\{-\omega^2 + 2\beta(k/m)i + (k/m)\right\}x = -\ddot{y} \tag{2}$$

入力を加速度 $\ddot{y}$，出力を応答変位 x とする場合の伝達関数 $H(i\omega)$ およびその振幅 $|H(\omega)|$ は式(3)(4)で表せる。

$$H(i\omega) = \frac{1}{\omega^2 - 2\beta(k/m)i - (k/m)} \tag{3}$$

$$|H(\omega)| = \sqrt{\frac{m^2}{(2\beta k)^2 + (m\omega^2 - k)^2}} \tag{4}$$

RC 構造の非線形履歴性状を，損傷の進行に伴う剛性低下と減衰増大を考慮し等価線形系で近似的に表すため，等価剛性および等価減衰を次のように設定する。

等価剛性 k は，塑性率 μ の関数として式(5)で与える。また，等価減衰を表す複素減衰定数 β は，柴田による等価減衰[1), 2)]の式を準用し塑性率 μ の関数として式(6)で与える。なお式(5)(6)とも，簡略化のため降伏後剛性を 0 と

している。

$$k = k_0\alpha_y \Big/ \left(\eta^2\mu\right) \tag{5}$$

$$\beta = \beta_0 + \gamma\left(1 - 1\Big/\sqrt{\eta^2\mu}\right) \tag{6}$$

ここで，β_0 は初期減衰定数，γ は非定常性を考慮するための低減係数である。η は等価周期の低減係数である。

η を用いる理由は，RC 構造の非線形応答を精度良く評価するためには，原点と最大変位点の割線剛性から定まる等価周期 T_μ よりも短い周期を用いる方が適するという知見[例えば 12)]に基づく。そこで，地震応答開始から終了までの全過程における平均的な等価周期 T_{eq} を式(7)で定義する。T_{eq} はピークファクターの計算で用いる。

$$T_{eq} = \eta T_\mu = \eta T_0\sqrt{\frac{\mu}{\alpha_y}} \tag{7}$$

さらに，η の算定式として式(8)を使用する。式(8)は，予備的な非線形時刻歴地震応答解析を行い，擬似応答変位パワースペクトル密度面積を 2 等分する振動数を平均的な等価振動数とし，その計算結果に基づいて定めた経験式である。なお厳密には，η は地震動の卓越周期にも依存すると考えられる（詳細検討は今後の課題とする）が，本論では簡便さに配慮して(8)式を採用する。

$$\eta = \sqrt{\frac{1+3\mu}{4\mu}} \tag{8}$$

以上より，式(5)(6)を式(4)に代入することで，等価線形系伝達関数の振幅 $|H_\mu(\omega)|$ が設定できる。$|H_\mu(\omega)|$ は，次に述べる 2 乗平均平方根 σ の計算で使用する。

2.5 応答変位の 2 乗平均平方根 σ の評価方法

本節では，推定手法による応答変位の 2 乗平均平方根 σ の計算方法について述べる。2.2 の地動パワースペクトル密度 $G_I(\omega)$ と 2.4 の等価線形系伝達関数 $|H_\mu(\omega)|$ から，次式により周波数領域で σ を評価する。

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty |H_\mu(\omega)|^2\, G_I(\omega)d\omega} \tag{9}$$

なお，Parseval の定理より，時間領域の波形データとそのフーリエ変換である周波数領域データの 2 乗平均は互いに等しい関係が成り立つ。従って式(9)は間接的に時刻歴応答変位の 2 乗平均平方根を求めていることになる。

2.6 ピークファクターP の評価方法

本節では，推定手法によるピークファクターの計算方法について述べる。応答変位の 2 乗平均平方根 σ に対する最大応答変位の比をピークファクターP と定義する。P については主に線形・定常応答を対象に研究が行われている[例えば 4)~7)]。本論では，既往研究を参考にしつつ，厳密性や精度よりも簡易さを優先し，P の評価式として次の計算式を提案して使用する。

$$P = 1.2\sqrt{2\ln(2t_d / T_{eq})} \tag{10}$$

ここで，t_d は 2.2 の地動継続時間，T_{eq} は 2.4 の平均的な等価周期，1.2 は補正係数である。t_d が長く T_{eq} が短いほど，P の値は大きく評価される。

以降，式(10)の導出過程を説明する。まず，Ang が示したピークファクターの理論式[5)]から次式が導かれる[2)]。

$$P_2 = \sqrt{2\ln\left[\left\{1\Big/\ln\left(\frac{1}{1-p_o}\right)\right\}\cdot\left(2t_D\Big/T\right)\right]} \tag{11}$$

ここで，p_o は超過確率，t_D は定常継続時間，T は線形系の固有周期である。式(11)において，継続時間内に振幅が超過する平均期待回数を 1 とする場合は超過確率 $p_o = 1-\exp(-1) = 0.6321$ となり，このときのピークファクターP_3 は次式で表される[2)]。

$$P_3 = \sqrt{2\ln\left(2t_D\Big/T\right)} \tag{12}$$

式(12)において，t_D を t_d に，T を T_{eq} にそれぞれ置換し，さらに評価精度を向上させるため補正係数 1.2 を乗じる（この効果については 3.4 で後述）ことで，本論で用いる P の簡易な評価式(10)が得られる。

3. 応答推定手法の妥当性検証

本章では，前章で述べた評価式(9)(10)および**図－1** の応答推定フローにより，応答変位の 2 乗平均平方根，ピークファクター，最大応答変位をそれぞれ計算する。さらに，同条件における非線形時刻歴解析結果と比較することで，応答推定手法の妥当性を検証する。

3.1 応答推定手法における設定パラメータ

評価式(9)(10)および**図－1** の応答推定フローにおける計算の際には，**表－1** に示す各パラメータを設定する（ただし降伏後を対象としているため q は除く）。

表－1　各パラメータの設定値

パラメータ名称	記号	設定値
降伏時剛性低下率	α_y	0.3
ひび割れ強度比	q	1/3
質点質量	m	10^7 kg
重力加速度	g	9.81 m/s^2
初期周期	T_0	0～1.5 s まで変化
初期剛性	k_0	各 T_0 に応じて計算 $k_0 = m(2\pi / T_0)^2$
降伏せん断力係数	C_y	所要耐力スペクトル (μ=2，3)より与える
降伏変位	δ_y	各 T_0，C_y に応じて計算 $\delta_y = mgC_y/(k_0\alpha_y)$
初期減衰定数	β_0	0.03
等価減衰の低減係数	γ	0.2

3.2 非線形時刻歴解析の方法

本節では，非線形時刻歴解析の方法について説明する。解析モデルは一質点系とし，非線形ばねに**図－6** で示した復元力特性を与える。復元力特性の各パラメータは，応答推定手法における設定値と同条件にするため**表－1** で示した値を用いる（β_0，γ を除く）。粘性減衰は瞬間剛性比例型の減衰定数 $h=0.03$，数値積分は Newmark-β 法（$\beta=1/4$），時間刻みは 0.001 s とする。

3.3 応答変位の 2 乗平均平方根 σ の評価精度

本節では，式(9)による応答変位の 2 乗平均平方根 σ の評価精度を検証する。推定手法および非線形時刻歴解析より計算される σ の比較を**図－7** に示す。入力波 3 波について，左図に $\mu=2$，右図に $\mu=3$ とする場合の計算結果を示しており，各グラフとも縦軸を σ，横軸を初期周期 T_0 で表示している。非線形時刻歴解析の σ は，解析で得られる時刻歴応答変位 $x(t)$，地動継続時間 t_d およびその区間 t_1，t_2 から次式で計算している。

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{t_d}\int_{t_1}^{t_2}|x(t)|^2\,dt} \tag{13}$$

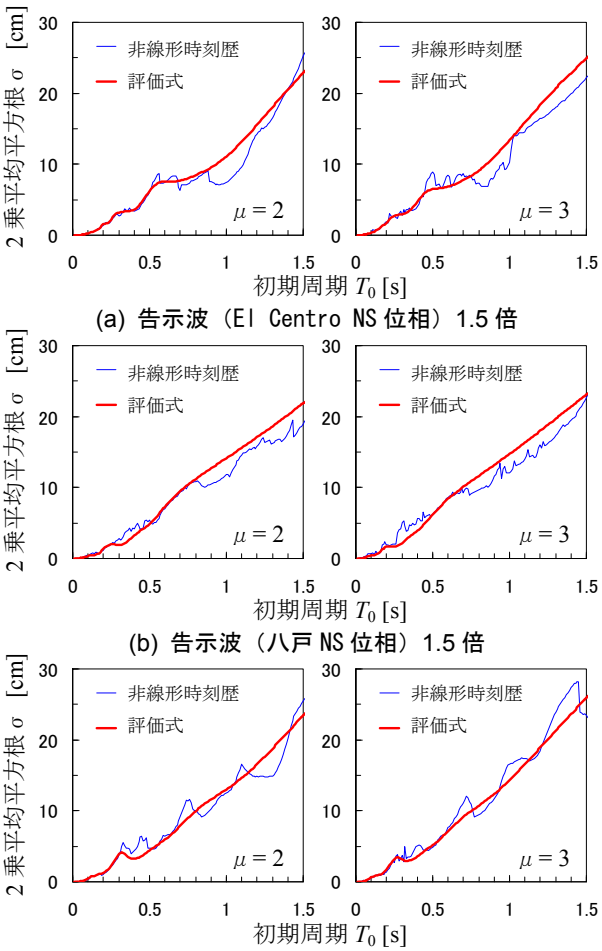
図－7 より，式(9)による σ の評価値は，非線形時刻歴解析による σ に対して，ばらつきはあるが概ね近い値を示している。これより，式(9)の妥当性が確認できる。

3.4 ピークファクターP の評価精度

本節では，式(10)によるピークファクターP の評価精度を検証する。推定手法および非線形時刻歴解析より得られる P の比較を**図－8** に示す。各グラフとも，縦軸を P とし，その他は**図－7** と同様である。非線形時刻歴解析の P は，解析結果の最大応答変位 $|x(t)|_{\max}$ から次式で計算している。

$$P=|x(t)|_{\max}\Big/\sqrt{\frac{1}{t_d}\int_{t_1}^{t_2}|x(t)|^2\,dt} \tag{14}$$

図－8 より，式(10)による評価式（補正係数あり）の P は，非線形時刻歴解析による P の変動のおおよそ中間的な値を示し，概ね対応している。これより，式(10)の妥当性が確認できる。参考として，式(10)において補正係数 1.2 を乗じない場合の計算結果を**図－8** に併せて示す。評価式（補正係数なし）の P は，非線形時刻歴解析の P の変動の概ね下限に対応する傾向を示している。

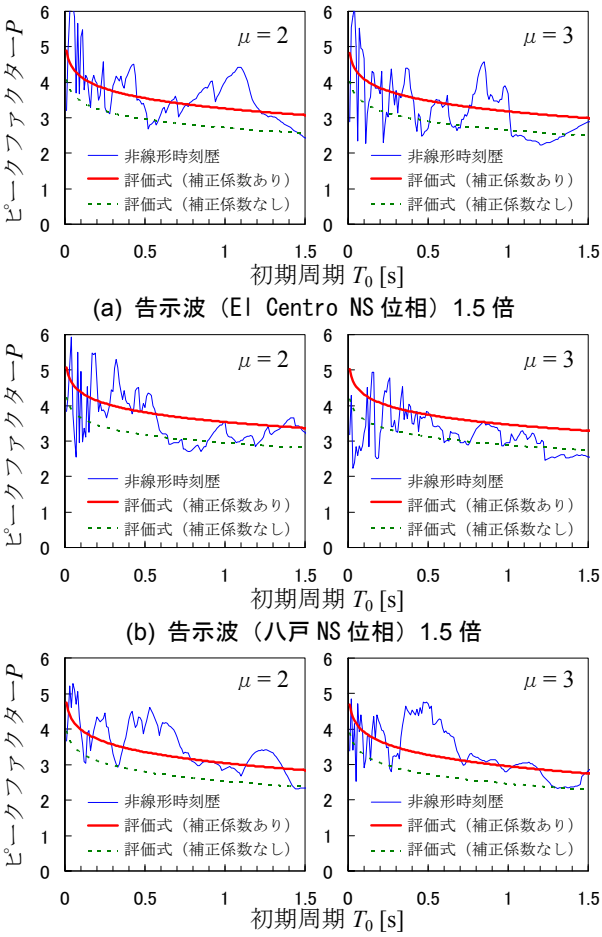


(a) 告示波（El Centro NS 位相）1.5 倍

(b) 告示波（八戸 NS 位相）1.5 倍

(c) 告示波（神戸 NS 位相）1.5 倍

図－7　応答変位の 2 乗平均平方根 σ の比較



(a) 告示波（El Centro NS 位相）1.5 倍

(b) 告示波（八戸 NS 位相）1.5 倍

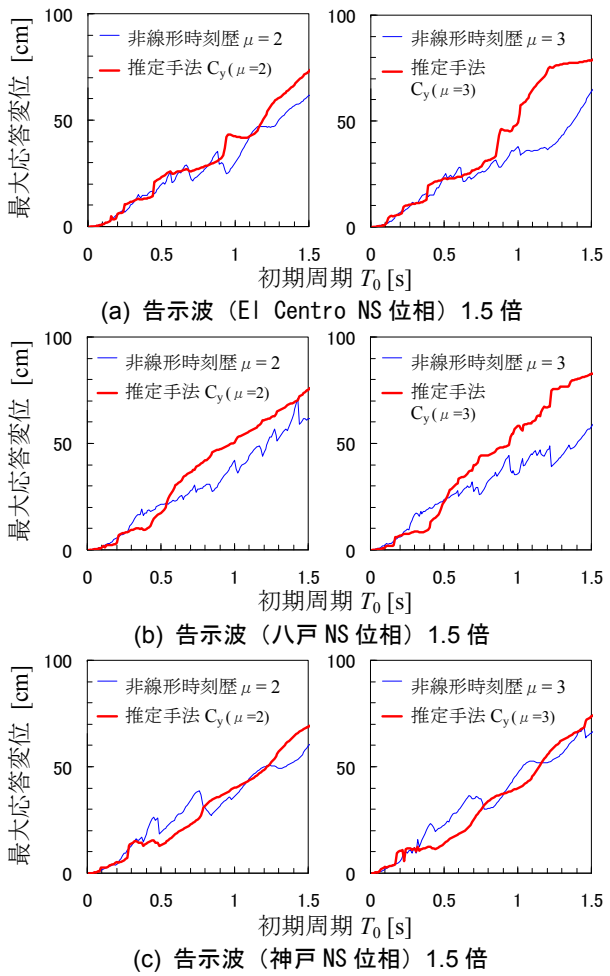
(c) 告示波（神戸 NS 位相）1.5 倍

図－8　ピークファクターP の比較

3.5 最大応答変位の推定精度

本節では，**図－1** で示した応答推定フローにより最大応答変位の推定値を求めるとともに，検証のため非線形時刻歴解析の結果と比較する。最大応答変位の推定値と非線形時刻歴解析結果の比較を**図－9** に示す。縦軸を最大応答変位とし，その他は**図－7** と同様である。

図－9 より，推定手法による最大応答変位は，非線形時刻歴解析結果と比べ概ね良く対応している箇所とばらつきが大きい箇所が認められる。推定精度が悪い部分については，特に**図－8** のピークファクターの評価精度が向上すれば改善すると考えられる。



図－9　最大応答変位の比較

4. まとめ

本論では，RC 構造の簡易な非線形地震応答評価法の提案を目的とし，不規則振動論に基づく最大変位の推定手法について検討した。

一質点系モデルを対象とし，不規則振動論の準用による簡易な応答推定手法を提示した。提案手法は，より一般性が高い解が得られ，地震動・構造物・確率論的振幅の各因子に分解して検討可能であり，地動継続時間を陽な形で考慮できる，という特長を有する。

提案手法により応答変位の 2 乗平均平方根，ピークファクター，最大応答変位をそれぞれ推定し，非線形時刻歴解析による計算値と比較検証した。推定精度の向上が今後の課題であり，地動継続時間の設定，ピークファクターの評価式，最大変位点の等価周期から平均的な等価周期を評価する低減係数，等価減衰の設定式については更なる検討の余地がある。また本論とは地震波の数や規模，塑性率等の条件が異なる場合の検討も望まれる。

なお，本論ではダンパーが無い非制振 RC 構造を対象としたが，提案手法はダンパーを有する制振構造にも拡張可能であり，伝達関数に基づく制振設計手法と連続性が高い利点があるため，今後の応用・展開が期待できる。

参考文献

1) Shibata,A. and Sozen,M.A. : Substitute-Structure Method for Seismic Design in R/C, Proc.of ASCE, Vol.102, St 1, pp.1-18, Jan.1976
2) 柴田明徳：最新耐震構造解析，森北出版，1981.6
3) 島崎和司：等価線形化法を利用した応答変位推定式による構造特性係数 Ds の評価，日本建築学会構造系論文集，第 516 号，pp.51-57，1999.2
4) A.G.Davenport : Note on the Distribution of the Largest Value of a Random Function with Application to Gust Loading, Proceedings of the Institution of Civil Engineers, pp.187-196, 1964
5) A.H-S.Ang : Probability Concepts in Earthquake Engineering, Applied Mechanics in Earthquake Engineering, ASME, Winter Annual Meeting, pp.225-259, Nov.1974
6) E.H.Vanmarcke : On the Distribution of the First-Passage Time for Normal Stationary Random Processes, Journal of Applied Mechanics, pp.215-220, Mar.1975
7) 尾崎隆司，高田毅士：初通過理論を用いたパワースペクトル密度関数と応答スペクトルの相互変換 日本建築学会・荷重指針（案）に関して，構造工学論文集, Vol.49B, pp.343-349, 2003.3
8) 松島豊：地震動に似た外乱を受ける履歴 1 自由度系のランダム応答，日本建築学会構造系論文報告集，第 382 号，pp.50-55，1987.12
9) 大鳥靖樹，平田和太：免震構造物の確率論的簡易応答評価手法の開発，電力中央研究所報告，研究報告：U92042，pp.1-21，1993.1
10) 白井和貴，五十子幸樹，井上範夫：履歴型ダンパーを有する RC 造架構を対象とした等価線形化による複素剛性モデルの地震応答解析，構造工学論文集，Vol.56B，pp.107-116，2010.3
11) 白井和貴，五十子幸樹，井上範夫：複素剛性表現による RC 1 自由度質点系の等価線形地震応答解析，コンクリート工学年次論文集，Vol.32，No.2，pp.913-918，2010.6
12) 岡野創，宮本裕司：等価線形化法に基づく応答評価式：エネルギーバランスに基づく考察と限界変形の超過確率の評価への適用，日本建築学会構造系論文集，第 562 号，pp.45-52，2002.12