

論文 PC ケーブル緊張時における FEM 応力解析手法の提案

石川 靖晃*1・松本 一志*2

要旨: ケーブル緊張時, 即ちケーブルがコンクリート躯体から抜け出ている時に, PC ケーブルとコンクリートの相対変位がゼロになる位置 (以下, 不動点と称する) は, 摩擦力の方向が反転する位置であるが, その不動点を見出し, ケーブル緊張によって生じる摩擦力の定式化を行った。加えて PC ケーブルの抜け出し量をコンクリートの変形を考慮しながら自動的に計算する方法についても提案した。初期ひずみ法と本提案手法を比較した結果, 定着部近傍を除けば, 設計断面では両者とも類似した応力解を与えることが確認された。さらに実際の PC セグメント桁の緊張の実測例に対して比較検討した結果, 本提案手法の妥当性が示された。
キーワード: PC ケーブル, 不動点, 摩擦力, 抜け出し量, 初期ひずみ法

1. はじめに

PC 構造物において PC ケーブル緊張時における応力解析問題は既に解決済であると一般には認識されているが, 実際には, PC ケーブルとコンクリート間の摩擦力に関する力学的取り扱いが基本的に解決していないことが現状である。そのために一般的な PC ケーブル緊張時の解析においては, ケーブル要素に初期ひずみを与える方法¹⁾やケーブルの曲線配置における外力を手計算により求め, コンクリートにその外力を与える方法²⁾が用いられてきた。このような方法でも, ある程度の近似解が得られるが, PC ケーブルには緊張時に 100mm のオーダーにて抜け出しが生じるため, 摩擦力により最大で 20%~30% のオーダーで緊張力が減少する現象に対しては, 厳密な意味での FEM 解析はこれまで行われていなかった。

本論文では, この問題に対して, PC ケーブルとコンクリート間での相対位置の正負変化および繰り返し挙動に係わらず摩擦係数は不変であるとの前提で FEM による完全解を求める手法を提案することを目的とする。まず, PC ケーブル両端での緊張力によって変動する不動点位置を同定し, 不動点の位置によって変化する摩擦力の方向およびその大きさを定義する。続いて, コンクリートの変形を考慮に入れた緊張端部における PC ケーブルの抜け出し量の求め方について定式化した。また, 複数本の PC ケーブルが順次緊張される際の, 緊張中の PC ケーブルと既に緊張された PC ケーブルの緊張緩和に関する力学的取り扱い方法についても示す。

そして, 簡易なモデルを用いて数値実験を行い, 初期ひずみ法との比較を行った。最後に実際の PC セグメント桁のケーブル緊張事例について本提案手法により数値シミュレーションを行い, 設計断面における PC ケーブル緊張力の設計値や引き抜け量の実測値と比較を行った。

2. PC ケーブル緊張時の FEM 応力解析手法の定式化

2.1 PC ケーブルにおける不動点の定義

PC ケーブルの緊張力は摩擦の影響を受けるため, 緊張力は PC ケーブル端部から離れた位置に行くほど低減する。緊張端から PC ケーブルに沿って x だけ離れたケーブル位置における緊張力 T はコンクリート標準示方書³⁾やコンクリート道路橋施工便覧⁴⁾によれば

$$T = T_0 \exp(-\mu\theta - \lambda x) \tag{1}$$

で表される。ここで T_0 は緊張端の緊張力, μ は角変化 1 ラジアン当りの摩擦係数(単位: 1/ラジアン), λ は緊張材の単位長さ(1m)当りの摩擦係数(単位: 1/m)であり, θ は端部からの角度変化の総量(単位: ラジアン)である。

今, 図-1 上に示すように PC ケーブルがコンクリート内に曲線配置で埋め込まれており, 左右両端をそれぞれ T_{L0} , T_{R0} の力で緊張することを考える。図-1 下に, 式(1)にて求められる PC ケーブル内の緊張応力 T と端部からの距離 x との関係のイメージを示す。式(1)は PC ケーブルの一つの端部からの緊張力分布を表現しているため, 距離 x を表す軸は左右端部の 2 か所を原点として与えられる。左側の緊張力 T_{L0} から式(1)に基づき低減された力(青線)と, 右側の緊張力 T_{R0} から式(1)に基づき低減された力(青線)がちょうど釣り合う(青線が交差する)位置が

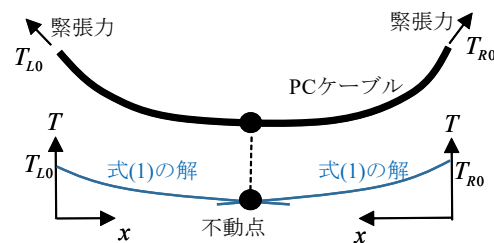


図-1 PC ケーブルにおける不動点の定義

*1 名城大学 理工学部社会基盤デザイン工学科教授 博士(工学) (正会員)

*2 名城大学大学院 理工学研究科社会基盤デザイン工学専攻

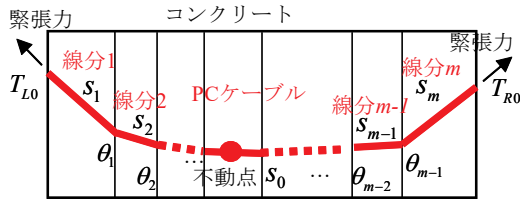


図-2 PCケーブルの多直線によるモデル化

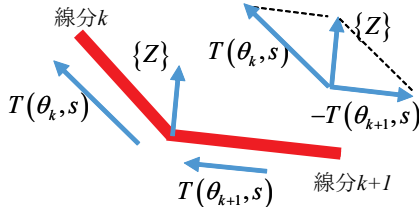


図-3 押し上げ力と緊張力の釣り合い

不動点である。不動点を境にして摩擦力の方向は逆向きに変化するため、不動点が求められない場合はPCケーブルに起因する摩擦力を陽に計算することはできない。言い換えれば、不動点が求められると、摩擦力を計算することができる。本論文では図-2に示すように、曲線配置された1本のケーブルを多直線にて近似し、 m 本の線分で構成される一連の線群としてモデル化することを試みる。多直線近似をする理由は後の耐荷力計算などの取り扱いが簡単になるためで、緊張管理計算には、近似度を必要に応じて増大できるので特にモデルでの問題は無いと考える。 m 本の線分長さは一般的に等分割ではなくPCケーブルの曲率に応じて分割を与える必要がある。例えば偏向部のような曲率変化が大きい部分では分割数を多くして線分長さを小さく与える必要がある。なお、各線分の両端がコンクリート要素の面上にある必要はない。PCケーブル左端からの線分に沿って s 軸をとる。さらに、図中の線分 k と線分 $k+1$ との成す角度の左側端部からの総和を θ_k とする。なお、角度の符号は時計回りを正とする。このとき、不動点 s_0 はその定義より次式を満たす。

$$T_{L0} \exp(-\mu\theta_k - \lambda s_0) = T_{R0} \exp(-\mu\theta_{m-k} - \lambda(s_{\max} - s_0)) \quad (2)$$

式(2)に、二分法を適用し繰り返し計算を行うことにより、不動点 s_0 を数値的に得ることができる。したがってケーブル内に生じる緊張力 $T(\theta_k, s)$ は不動点を境にして次式で表される。

$$T(\theta_k, s) = \begin{cases} T_{L0} \exp(-\mu\theta_k - \lambda s) & s \leq s_0 \\ T_{R0} \exp(-\mu\theta_{m-k} - \lambda(s_{\max} - s)) & s > s_0 \end{cases} \quad (3)$$

ここで s_{\max} は線群全体の長さである。PCケーブルを多直線で近似し不動点を求め、式(3)にてPCケーブル緊張力の摩擦による低減をその大きさと方向も含めて明示し

た点が本論文の特長の一つである。

2.2 摩擦力のコンクリート等価節点力への変換

本節では、式(3)に基づき、PCケーブルの摩擦力と等価節点力を求めコンクリート要素に与える形で、プレストレスを表現することを試みた。この等価節点力増分 $\{Q\}$ は、左右最端部の緊張力がコンクリート要素にもたらす反力、PCケーブルに沿った摩擦力、および角度変化に伴う押し上げ力で構成される。左右最端部の緊張力がコンクリート要素にもたらす反力 $\{R\}$ は緊張力 T_{L0} 、 T_{R0} をこれらの力が作用している位置に対応するコンクリート位置に逆向きで作用させることにより得られる。PCケーブルに沿った摩擦力変化量 $\{S\}$ は、式(3)を s で偏微分することにより、次式で表される。

$$\{S\} = \frac{\partial T(\theta_k, s)}{\partial s} \{n_k\} \quad (4)$$

ここで、 $\{n_k\}$ は線分 k の方向を表す単位ベクトルである。角度変化に伴う押し上げ力 $\{Z\}$ と、線分が繋がる各点において式(3)で与えられる緊張力は図-3のように釣り合うため、 $\{Z\}$ は次式で表される。

$$\{Z\} = T(\theta_k, s)\{n_k\} - T(\theta_{k+1}, s)\{n_{k+1}\} \quad (5)$$

PCケーブルを多直線近似することにより、曲線配置であれば困難であった押し上げ力の数理的表現を式(5)のような比較的単純な形で表現したことも本論文の特長の一つである。

仮想仕事の原理により次式の関係が成立する。

$$\delta\{u\}^T \{Q\} = \delta\{u\}^T [\{R\} + \{Z\}] + \int_s \delta\{u\}^T \{S\} ds \quad (6)$$

ここで、 $\delta\{u\}$ は仮想変位であり、コンクリート要素の形状関数 $[N]$ とコンクリート要素の仮想節点変位 $\delta\{\bar{u}\}$ を用いて次式で表される。

$$\delta\{u\} = [N]\delta\{\bar{u}\} \quad (7)$$

式(4)～式(7)から等価節点力増分 $\{Q\}$ は最終的に次式で表される。

$$\{Q\} = [N]^T [\{R\} + \{Z\}] + \int_s [N]^T \frac{\partial T(\theta_k, s)}{\partial s} \{n_k\} ds \quad (8)$$

式(8)には s に関する経路積分が含まれているが、不動点 s_0 が存在する線分領域では、不動点を境に場合分けする必要のあることに留意する必要がある。式(8)中の経路積分は文献⁹⁾に示された数値積分方法により容易に行うことができる。

2.3 コンクリートの弾性変形を考慮した抜け出し量の計算方法

PCケーブルの左右最端部での抜け出し量は、PCケーブル自身の抜け出し量だけではなく、コンクリートの変形についても考慮する必要がある。抜け出し量はPCケーブル両端部で生じるが、PCケーブル左右端の抜け出し

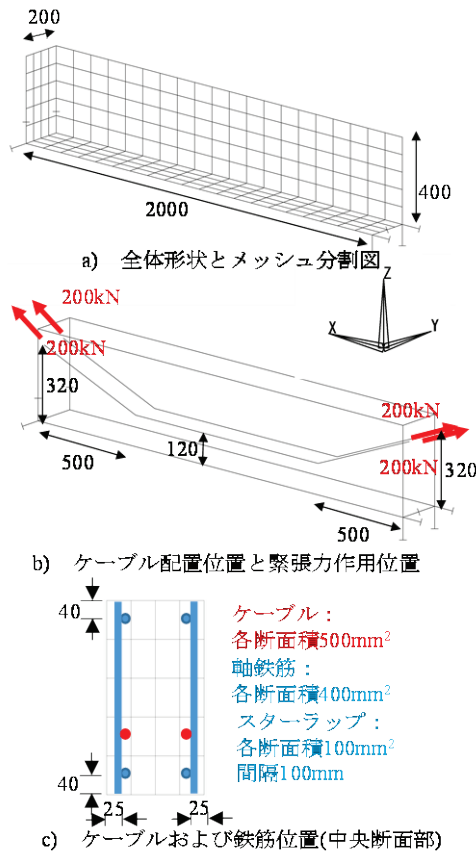


図-4 解析対象モデル

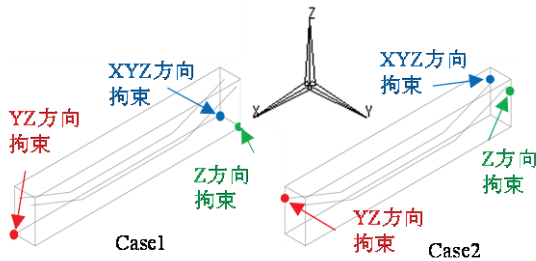


図-5 変位拘束条件

表-1 解析に用いたパラメータ

ヤング係数(コンクリート)(kN/mm ²)	20
ヤング係数(ケーブル)(kN/mm ²)	210
ヤング係数(鉄筋)(kN/mm ²)	210
ポアソン比(コンクリート)	0.2
摩擦係数 μ	0.3
摩擦係数 $\lambda(1/m)$	0.004

量をそれぞれ Δl_L , Δl_R とすると、これらは次式で表される。

$$\Delta l_L = \Delta l_{L,cab} - \Delta l_{L,con}, \quad \Delta l_R = \Delta l_{R,cab} - \Delta l_{R,con} \quad (9)$$

ここで、下付き添字“cab”および“con”は PC ケーブルおよびコンクリートの変形に起因する抜け出し量を表す。これらの抜け出し量は、それぞれ次式で表される。

$$\Delta l_{L,cab} = \int_0^{s_0} \frac{T(\theta_k, s)}{EA} ds, \quad \Delta l_{R,cab} = \int_{s_0}^{s_{max}} \frac{T(\theta_k, s)}{EA} ds \quad (10)$$

$$\Delta l_{L,con} = \int_0^{s_0} \varepsilon_c ds, \quad \Delta l_{R,con} = \int_{s_0}^{s_{max}} \varepsilon_c ds \quad (11)$$

ここで、 EA は PC ケーブルの軸剛性であり、 ε_c は PC ケーブルを表す線群に沿った方向でのコンクリートの直ひずみ成分であり、コンクリートのひずみテンソルと $\{n_k\}$ から求めることができる。式(10)式(11)中の経路積分についても文献⁵⁾に示された方法にて行うことができる。式(9)～式(11)より抜け出し量が計算できる。

2.4 PC ケーブルを順次緊張するときの力学的な取り扱い

一般的に PC ケーブルはコンクリート内に複数本配置され、順次緊張される。ある PC ケーブルを緊張しているとき、緊張に伴うコンクリートの変形のため、以前に既に定着された PC ケーブルには、緊張力のゆるみが生じる。解析においてはこのゆるみについても力学的に勘案される必要がある。本論文では、すでに緊張されて定着された PC ケーブルはコンクリートと完全に付着していると仮定し、トラス要素にて有限要素にてモデル化することで、このゆるみを表現することにした。

3. 本提案手法の特質についての基本検討

3.1 PC ケーブル緊張に起因するコンクリート要素の等価節点力の釣り合いに関する検討

式(8)の節点力は基本的には内的に作用する力であるため、式(8)の PC ケーブル緊張に起因するコンクリート要素の等価節点力の節点による総和と任意点周りのモーメントの総和は必ず 0 になる必要がある。この点について単純な解析モデルを想定し 3DFEM により数値的確認を行った。解析対象モデルを図-4 に示す。モデルは長さ 2m の PRC はりであり、はりの中に 2 本の PC ケーブルが配置されている。さらに軸鉄筋およびスターラップが配置されている。コンクリートは Solid 要素でモデル化し、鉄筋は分布ひび割れモデルとして取り扱い、鉄筋が埋め込まれたコンクリート要素内に鉄筋比として考慮されている。PC ケーブルは各コンクリート要素内に存在する部分を一つの線分としてモデル化されている。解析に用いた材料パラメータを表-1 に示す。各 PC ケーブルに両引きにて 200kN の緊張力を同時に与えた。緊張力導入後、各ケーブルのセット量は左右ともに 0.5mm を与えた。なお、PC ケーブルの緊張に着目するため、自重は考慮されていない。簡単のため、コンクリート、PC ケーブルおよび鉄筋はすべて弾性体であると仮定した。拘束条件については解析モデルが剛体運動しない最小限の拘束自由度(6 自由度)を考え、Case1, Case2 の 2 ケースを与えた(図-5)。Case1 は、はり底面部を単純支持、Case2 は、

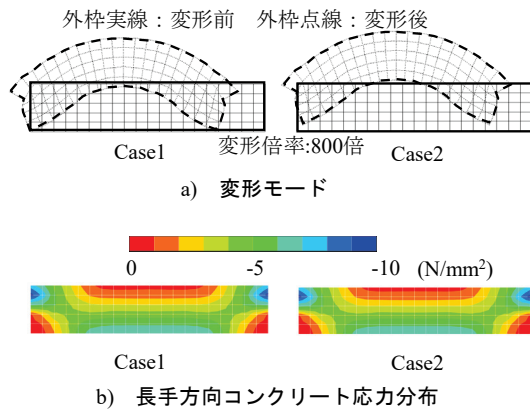


図-6 各ケースにおける変形モードおよび長手方向コンクリート応力

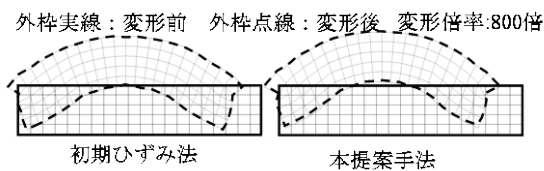


図-7 両手法による変形モード

PC ケーブル緊張端部付近を単純支持とした境界条件であり、拘束自由度は同じであるが拘束位置が異なる。

PC ケーブルを緊張しセット量を与えた直後の、各ケースにおける変形モードおよび長手方向コンクリート応力分布を図-6 に示す。各ケースにおいて座標位置は異なるものの変形モード自体は一致しており、応力分布も一致している。すなわち節点による総和と任意点周りのモーメントの総和は0となっており、式(8)の等価節点力は内的に作用する力であることが確認された。言い換えれば剛体運動しない最低限の拘束自由度を与えた場合には、応力などの解は拘束条件に依存しないことが示された。

3.2 本提案手法と初期ひずみ法との比較検討

前節で述べた解析モデルを用いて、初期ひずみ法においても数値シミュレーションを行い、本提案手法の解との比較を行った。初期ひずみ法においてはPC ケーブルをトラス要素でモデル化した。トラス要素とコンクリート要素は完全に付着していると仮定し、緊張力をケーブル軸剛性で除した値(0.0019)を自由収縮ひずみとしてトラス要素に与えた。初期ひずみ法ではセット量の効果については考慮しなかった。拘束条件はCase2とした。

図-7 に両手法による緊張力導入直後の変形モードを示す。両手法ともに、変形モードはほぼ同様となっていることがわかる。図-8 に両手法によるPC ケーブル応力分布を示す。この図から、設計上重視されるはり中央部では両手法でのPC ケーブル応力は類似しているが、PC ケーブル端部付近ではPC ケーブル応力は異なっている。

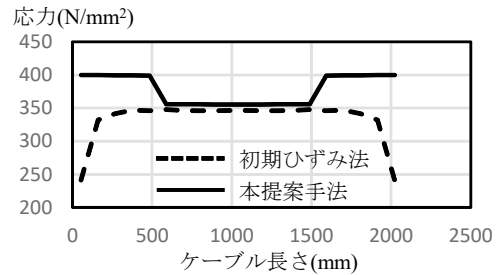


図-8 両手法によるPC ケーブル応力分布

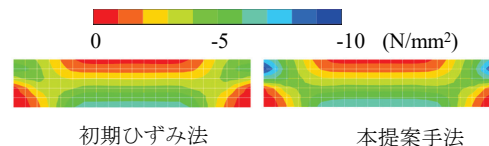


図-9 両手法による長手方向コンクリート応力

特に、初期ひずみ法でのPC ケーブル応力は、本提案手法に比べ極端に小さいことがわかる。この理由は、初期ひずみ法の場合、PC ケーブル端部において、PC ケーブルとコンクリートに生じる作用反作用の力が生じないためである。図-9 に長手方向コンクリート応力分布を示すが、はり中央部では両手法でのコンクリート応力は類似している一方で、PC ケーブル端部付近では、初期ひずみ法によるコンクリート応力の絶対値は本提案手法によるものと比べると小さい。

本提案手法で求めた片側の抜け出し量はセット量導入前で2.27(1.87)mm、セット量導入後で1.77(1.46)mmとなった。なお、カッコ内数字はPC ケーブルのみの抜け出し量分を表している。このようにコンクリートの変形を含めた抜け出し量を自動的に計算することが本提案手法の特長である。

4. 実際のPC 桁のPC ケーブル緊張事例に基づく本提案手法の基本検証

実際のセグメント桁の緊張事例に対して、本提案手法にて数値シミュレーションを行い、本提案手法の妥当性について検討を行った。

このセグメント桁の全体形状およびPC ケーブル、鉄筋の配置状況を図-10 に示す。なお、図中のメッシュは本提案手法によるFEM 解析モデルのメッシュ分割を表している。桁長さは33.8m、桁高さは2.1mである。PC ケーブルとして12S12.7が5本使用されている。PC ケーブル番号C1からC5にかけて両引きで順次緊張が行われている。設計に用いた材料パラメータを表-2 に示す。設計断面における導入直後のプレストレスによる設計鋼材引張力 P_t は6446.5kNであり、最上縁応力は4.56N/mm²、最下縁応力は-23.2N/mm²である。なお鉄筋の効果、セット量、自重等の外荷重、およびクリープ、乾燥収縮の影

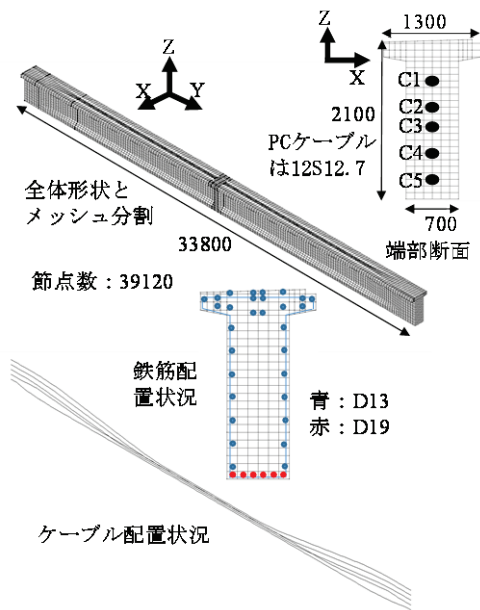


図-10 セグメント桁概要

表-2 設計に用いた材料パラメータ

ヤング係数(コンクリート)(kN/mm ²)	29.2
ヤング係数(ケーブル)(kN/mm ²)	200
ヤング係数(鉄筋)(kN/mm ²)	210
ポアソン比(コンクリート)	0.2
摩擦係数 μ	0.3
摩擦係数 λ (1/m)	0.004

響は含まれていない。

この事例に対して本提案手法により数値シミュレーションを行った。本解析では、緊張後定着された PC ケーブル要素はコンクリート要素と完全に付着していると仮定した。拘束条件については、剛体運動が生じない最低限の拘束自由度(6 自由度)を与えた。すべての材料は弾性体と仮定した。鉄筋についてはコンクリート要素中に鉄筋比として分散させることで考慮した。本解析で使用した材料パラメータは、表-2 で示す値を使用した。図-11 に、多直線近似に基づき求めた式(3)の解(近似解)と設計計算で用いられた緊張応力分布(厳密解)との比較を示す。近似解は厳密解とすべて良く適合しており、すべての PC ケーブルが多直線要素にて適切に近似されていることを示している。図-11 には、すべての PC を緊張した直後の PC ケーブル応力分布も重ねて示している。この応力分布から設計断面における鋼材引張力 P_i を求めた結果、 P_i は 6384.5kN となり設計値とほぼ同様の値となった。図-12 にすべての PC ケーブルにおける圧力計の読みと抜け出し量の実測値と数値シミュレーションとの比較を示す。ただし、図-12 の結果を得るにあたり PC ケーブルのヤング係数は設計値ではなく試験により

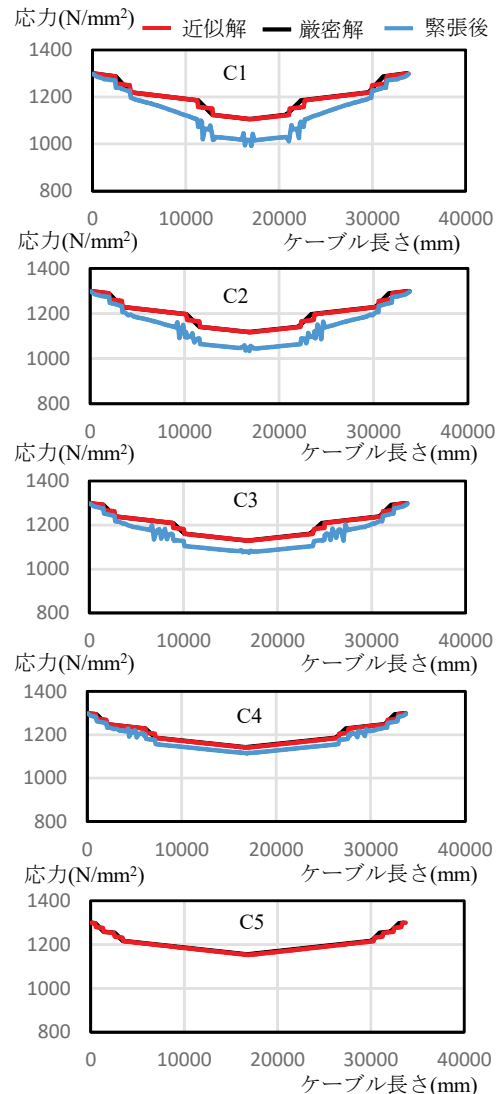


図-11 PC ケーブル応力分布

得られた数値(193GPa)を使用し、摩擦係数 μ を 0.0 と 0.4 と変更している。これらの摩擦係数は一般的な緊張管理で用いられる摩擦係数の下限値および上限値に概ね相当する。また、実測値を表す線においては原点を通るように補正が施されている。数値シミュレーションは実測値と適合している。従前の緊張管理において、実際の PC ケーブルのヤング係数を用いて抜け出し量に対する圧力計の読みの勾配を計算した場合、その勾配は一般的に実測値よりも大きくなる。そのため PC ケーブルのヤング係数として、実際の値よりも小さくした見かけのヤング係数が使用される。本提案手法では初期ひずみ法も含めた従来の解析手法では考慮できなかったコンクリートの変形量を含んだ抜け出し量が計算されており、その影響の程度は、従前の緊張管理において PC ケーブルの実際のヤング係数と見かけのヤング係数を使用したときの違いの程度とほぼ同等であると考えられる。また、荷重計の読みと抜け出し量関係の実測値と数値シミュレーション

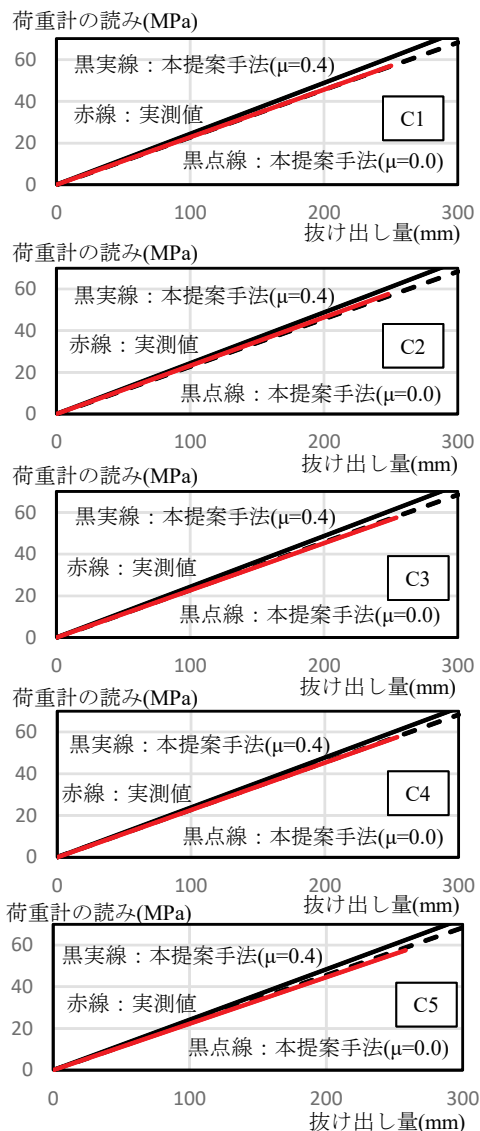


図-12 本提案手法と実測値との比較

ンによる解を適合させることにより、本提案手法による摩擦係数を実用上の範囲内で推定可能であることも示唆している。

5. おわりに

以上より、以下の結論を得る。

- PC ケーブルを多直線で近似することにより不動点を陽に求める手法を提案し、その不動点に基づき摩擦係数に等価なコンクリート節点力について定式化を行った。加えてコンクリートの変形を考慮した

PC ケーブルの抜け出し量を自動的に計算する方法についても提案した。

- はり構造物において本提案手法と初期ひずみ法との解を比較した結果、PC ケーブル端部付近では両者の解は異なるものの、設計断面では両者とも類似した解を与えることが確認された。
- 実際のPCセグメント桁の緊張事例に対して設計断面における緊張力および荷重計の読みと伸び関係について比較した結果、数値シミュレーションは実測値と良く適合しており、本論文での数値検討の範囲では本提案手法の妥当性が示された。

本論文では、PC 桁の事例にて検討を行ったが、本提案手法は、任意形状を有する PC 構造物に対しても統一的に適用可能である。今後、様々な形状を有する PC 構造物の実際の事例を基に数値シミュレーションを行い、その結果から引き留め線を求め、現行の緊張管理での引き留め線と比較検討を行いたいと考えている。

謝辞

本研究は、LECOM 研究会の研究活動の一環として実施されたものであり、研究会メンバーの皆様から多くのご意見をいただきました。とくに田辺忠顕先生におかれましては、研究の着想ならびに遂行に至るまでの間にわたり多くの貴重なご意見をいただきました。ここに厚くお礼申し上げます。極東興和株式会社藤田修氏、児島大輔氏、前田剛氏には、貴重なデータならびに多くのご指導をいただきました。ここに厚く謝意を表します。

参考文献

- 1) 武田健太ら：塩害劣化したプレテンション式 PC 桁の載荷試験と解析による耐力評価手法の検討，土木学会論文集 E2, Vol.71, No.4, pp.303-322, 2015
- 2) 濱田譲ら：筒状連続繊維棒材を用いた PC トラス桁の開発，土木学会論文集, No.697, V-54, pp.25-37, 2002
- 3) 土木学会：2007年度制定コンクリート標準示方書[設計編]，2007
- 4) 日本道路協会：コンクリート道路橋施工便覧，1998
- 5) Ishikawa, Y. et al: Development of FEM Thermal Analysis for Concrete Structures with Pipe Cooling System, Proc. of Concreep9, pp.491-498, 2013